

Л.Т. Дворников, Л.Н. Гудимова

Сибирский государственный индустриальный университет

ОСНОВАНИЯ К ИЗУЧЕНИЮ ПЛОСКИХ ШАРНИРНЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Машиностроение не может совершенствоваться без развития теоретических оснований к методам синтеза и конструирования машин. Является естественным, что новые машины, приходящие взамен морально и физически устаревших, оказываются более сложными с точки зрения их структуры и методов расчета на стадии проектирования. Наиболее широкое применение в технике имеют плоские шарнирные механизмы. Именно в этом направлении к настоящему времени накоплен богатый теоретический и практический опыт.

Обратимся к начальной стадии проектирования плоских механических систем, а именно к вопросу о структурном синтезе кинематических цепей как к основополагающей сути любых механических систем.

Известно, что кинематической цепью называют последовательное соединение звеньев в кинематические пары, позволяющее относительное их движение. Любую цепь можно охарактеризовать [1] рядом присущих ей параметров, которые вполне отличают рассматриваемую цепь от всех других. Важнейшими и неотъемлемыми параметрами являются следующие девять: n – число звеньев цепи; p – число кинематических пар цепи; τ – число кинематических пар наиболее сложного – базисного звена цепи, которыми оно соединяется с другими звеньями; δ – число выходов (свободных пар) цепи; α – число изменяемых замкнутых контуров цепи; α_i – сложность изменяемых замкнутых контуров; γ – число ветвей цепи; λ – общее число сторон звеньев цепи (λ_n –

наружных сторон, λ_v – внутренних сторон); λ_n/δ – распределение числа наружных сторон цепи между выходами.

В работе [2] было обосновано существование четырех видов плоских кинематических цепей, а именно – кинематических цепей Грюблера, групп Ассура, «ферм» Баранова и механизмов. Разработав особый алгоритм, профессор Э.Е. Пейсах [2] показал представленную в настоящей работе таблицу реального количества перечисленных цепей в зависимости от числа звеньев в них.

Считая весьма важным полученный Э.Е. Пейсахом результат, отметим, что особенности всех указанных четырех видов цепей к настоящему времени недостаточно изучены и обоснованы. Обратимся к разрешению этого вопроса. Рассмотрим зарождение и развитие идей, заложенных Грюблером, Ассуром, Барановым, в их ретроспекции и в современном понимании. Системный анализ таких цепей представляется весьма полезным уже на том основании, что эта проблема пока никем не рассматривалась в подробностях.

Научная статья М.Ф. Грюблера [3] является основополагающей в изучении одноименных цепей. К этому году уже была известна структурная формула механизмов П.Л. Чебышёва, обоснованная им в 1869 г. и имеющая в современных обозначениях вид

$$W = 3n - 2p_5; \quad (1)$$

Числа кинематических цепей по Пейсаху

Число звеньев в цепи	Число групп Ассура	Число цепей Грюблера	Число механизмов	Число звеньев	Число ферм Баранова
2	1	–	–	3	1
4	2	1	1	5	1
6	10	2	9	7	3
8	173	16	153	9	28
10	5442	230	4506	11	–
12	251638	6856	195816	13	–
14	–	318162	11429024	15	–

здесь W – подвижность цепи; n – число подвижных звеньев; p – число одноподвижных кинематических пар-шарниров.

Грюблер, зная формулу (1) Чебышёва, нашёл важным рассмотреть структуры, обладающие подвижностью $W = 4$, т.е. такие, в которых нет свободных кинематических пар (замкнутые, принужденные цепи) и которые могут иметь в плоскости четыре подвижности: три совместных для всей цепи – в плоскости и одну – относительного движения звеньев. Таким образом, цепи Грюблера – это такие цепи, которые удовлетворяют условию

$$3n - 2p_5 = 4. \quad (2)$$

Самой простой цепью Грюблера является четырехзвенная. Чтобы все их найти, Грюблер ввел понятие i -парных звеньев, т.е. звенья могут быть различной сложности – двухпарные, как все звенья, показанные на рис. 1, трехпарные, четырехпарные. Учитывая это, логически безупречно могут быть составлены два уравнения, описывающие все цепи Грюблера, а именно:

$$\begin{aligned} 2p_5 &= 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + \dots + jn_j; \\ n &= n_2 + n_3 + n_4 + \dots + j. \end{aligned} \quad (3)$$

Двойка слева в первом уравнении обосновывается тем, что при сложении всех пар звеньев n_2, n_3, n_4 и т.д. они (пары) проявляются дважды.

Рассмотрим шестизвенные цепи Грюблера. Тогда, подставляя $n = 6$ в уравнения (2) и (3), получим $p_5 = 7$, $n_2 = 4$, $n_3 = 2$. Таких цепей Грюблера всего две. Они показаны на рис. 2, а, б. Останавливая в этих цепях последовательно, т.е. делая звенья 1, 2, 3, 4, 5 и 6 неподвижными, можно получить всего пять структурно отличающихся друг от друга шестизвенных меха-

низмов, которые показаны на рис. 2: три (рис. 2, в, г, д) получаются из цепи, изображенной на рис. 2, а, и два (рис. 2, е, ж) – из цепи, показанной на рис. 2, б.

Если обратить внимание на стрелки, определяющие заданные движения звеньев на рис. 2, то всего из этих пяти схем можно создать отличающихся девять механизмов. Именно эти девять кинематических цепей, обладающих подвижностью $W = 1$, являлись основой создания реальных машин на практике.

Отметим, что Грюблер не решал и даже не ставил задачу о методе создания собственно названных его именем кинематических цепей.

Согласно таблице, восьмизвенных цепей Грюблера всего 16. Правда, по этому вопросу нет единого мнения. Есть сведения о том, что их 20 [4]. Во всяком случае, используя цепи Грюблера, можно найти многообразие отличающихся друг от друга восьмизвенных механизмов. Покажем лишь две из восьмизвенных цепей Грюблера, из которых образуются существенно отличающиеся по сложности механизмы (рис. 1).

Нахождение и использование цепей Грюблера является важным направлением в теории механизмов при создании работоспособных машин.

В 1914 г. русский ученый Леонид Владимирович Ассур обосновал другой принцип построения механизмов [5], который был сформулирован так: любой механизм может быть создан путем присоединения к ведущему звену группы или групп звеньев, обладающих нулевой подвижностью. Именно такие группы звеньев в дальнейшем стали называть группами Ассура. Надо сказать, что сам Ассур находил и исследовал так называемые нормальные группы, т.е. такие, которые заканчиваются поводками и которые не содержат внутри себя изменяемых замкнутых контуров.

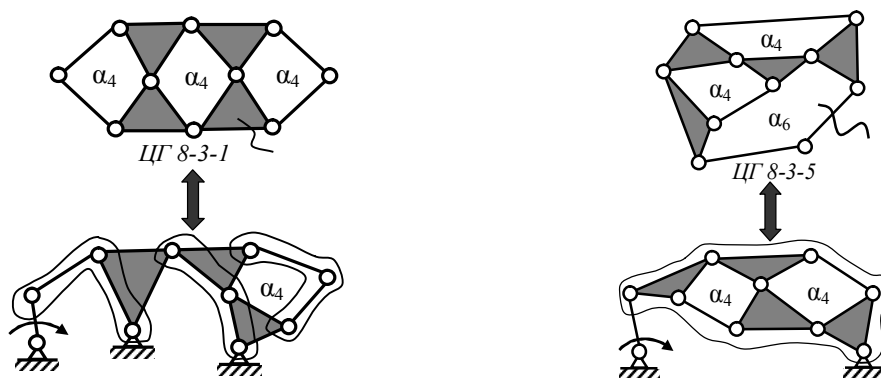


Рис. 1. Примеры восьмизвенных цепей Грюблера и механизмов, созданных на их основе

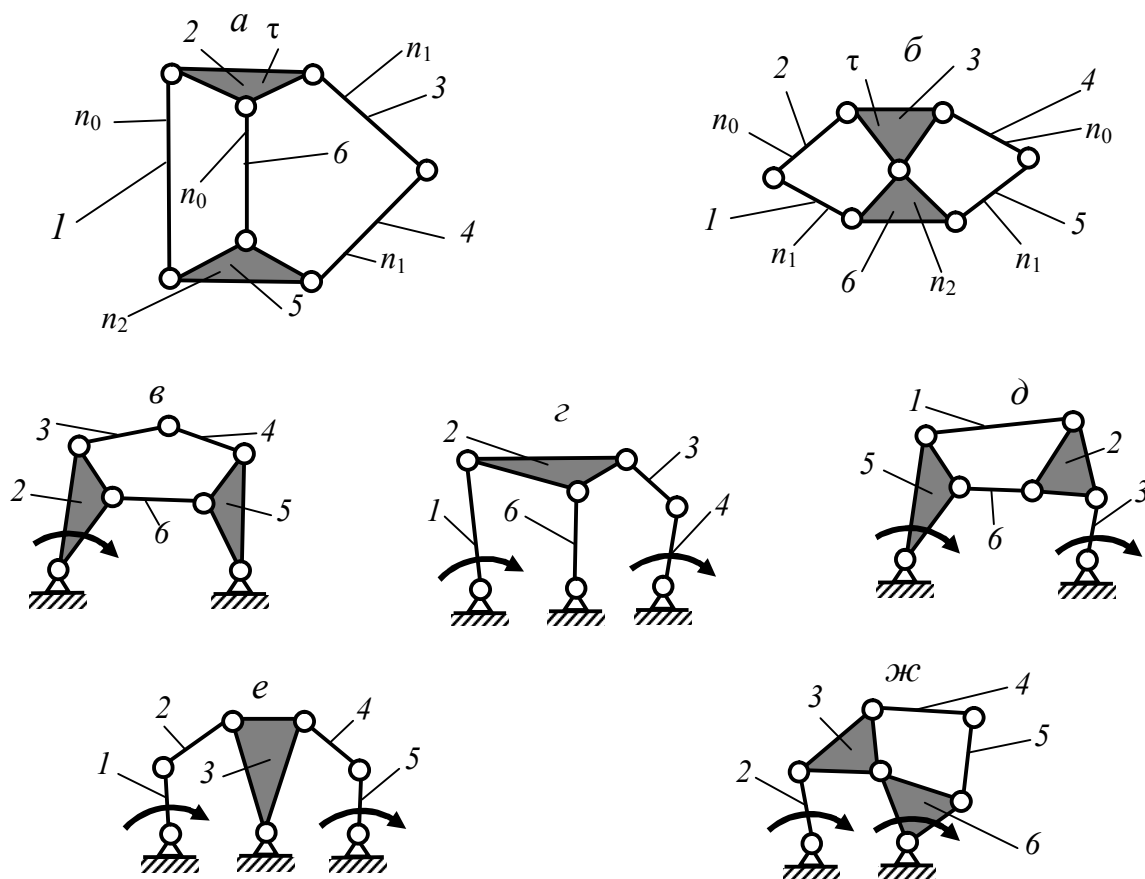


Рис. 2. Шестизвенные цепи Грюблера

В основе поиска групп Ассура лежит опять же формула (1) Чебышёва. Если поставить условие, что подвижность такой цепи $W = 0$, то все группы опишутся уравнением

$$p_5 = \frac{3n}{2}. \quad (4)$$

Из выражения (4) следует, что групп Ассура бесконечное множество. Лишь задаваясь конкретным значением n , можно находить и конечное число групп. Однако Л.В. Ассур не ставил перед собой задачу поиска всех возможных групп и указал лишь на один из методов получения более сложных шарнирных групп – метод развития поводка.

В практике машиностроения наиболее широко применяются так называемые диадные механизмы, т.е. такие, в которых используются двухзвенные группы. В связи с этим метод Ассура остается исключительно востребованным. Широко используемый метод Ассура синтеза механизмов поставил перед исследователями задачу, заключающуюся в нахождении собственно групп звеньев, обладающих нулевой подвижностью, которые могут быть использованы для создания новых схем механизмов.

Значительных результатов в решении этого вопроса добился Г.Г. Баранов. В работе [6] был предложен метод нахождения групп Ассура, в основу которого положено создание жесткой, замкнутой, неизменяемой группы звеньев, названной им «фермой». Сам метод заключается в получении групп Ассура путем последовательного отбрасывания одного из звеньев «фермы». Такие структуры, не имея внутренней подвижности, обладают тремя независимыми совместными движениями в плоскости, для которых формула подвижности запишется в виде

$$3n - 2p_5 = 3. \quad (5)$$

Из уравнения (5) можно найти число кинематических пар в виде зависимости

$$p_5 = \frac{3(n-1)}{2}.$$

Анализ приведенной зависимости показывает, что «фермами» Баранова будут являться структуры, состоящие из нечетного числа звеньев, начиная с трех. Нам представляется, что такие «фермы» могут быть использованы и для другой цели, а именно для получения ки-

нематических цепей механизмов. Для этого нужно не отбрасывать звено, а размыкать цепь по одной из кинематических пар и использовать таким образом отсоединенное звено в качестве ведущего.

Все описанные выше кинематические цепи разработаны их авторами с практической целью – создавать из них работоспособные механизмы. Эти методы применяются и в настоящее время. Однако в последнее время начинает приобретать широкое применение новый метод синтеза структур механизмов, основанный на подходе, опубликованном впервые в 1993 г. [7].

Любая сложная, разветвленная кинематическая цепь может быть описана двумя независимыми уравнениями вида

$$n = 1 + n_{\tau-1} + \dots + n_i + \dots + n_2 + n_1 + n_0; \quad (6)$$

$$p = \tau + (\tau - 1)n_{\tau-1} + \dots + in_i + \dots + 2n_2 + n_1; \quad (7)$$

здесь n_i – число звеньев, добавляющих в цепь по i кинематических пар; обозначение параметров n, p, τ приведено выше.

Если уравнения (6) и (7) объединить в систему с формулой подвижности П.Л. Чебышёва (1), то получим универсальную структурную систему вида

$$\begin{cases} p_5 = \tau + (\tau - 1)n_{\tau-1} + \dots + in_i + \dots + 2n_2 + n_1; \\ n = 1 + n_{\tau-1} + \dots + in_i + \dots + n_2 + n_1 + n_0; \\ W = 3n + 2p_5, \end{cases} \quad (8)$$

позволяющую находить решения при поиске структур всех описанных выше кинематических цепей, задаваясь подвижностью: $W = 4$ для цепей Грюблера, $W = 0$ для групп Ассура, $W = 3$ для «ферм» Баранова.

Покажем пример поиска шестизвенных цепей Грюблера, для которых $n = 6$, $W = 4$. Зададимся $\tau = 3$, в результате получим

$$\begin{cases} p_5 = 3 + 2n_2 + n_1; \\ n = 1 + n_2 + n_1 + n_0; \\ 3n + 2p_5 = 4. \end{cases} \quad (9)$$

Из третьего уравнения системы (9) при $n = 6$ найдем, что $p_5 = 7$. Подставим $p_5 = 7$ и $n = 6$ соответственно в первое и второе уравнения системы (9), после чего получим, что

$$2n_2 + n_1 = 4; \quad n_2 + n_1 + n_0 = 5.$$

Выразим n_1 из последнего уравнения:

$$n_1 = 5 - n_2 - n_0. \quad (10)$$

Подставим полученное выражение в уравнение $2n_2 + 5 - n_2 - n_0 = 4$, тогда

$$n_2 = n_0 - 1. \quad (11)$$

Полученное по формуле (11) значение n_2 подставим в уравнение (10) и определим число звеньев, добавляющих в цепь по одной кинематической паре: $n_1 = 5 - n_0 + 1 - n_0 = 6 - 2n_0$. Из уравнения (11) следует, что значение $n_0 = 0$ недопустимо. Примем $n_2 = 1$, тогда $n_0 = 2$, $n_1 = 2$. На рис. 2, а, б представлены цепи Грюблера, полученные по найденному решению.

Найдем все группы Ассура ($W = 0$) при $n = 4$, $p_5 = 6$ и $\tau = 3$. Из системы (8) получим

$$2n_2 + n_1 = 3;$$

$$n_2 + n_1 + n_0 = 3.$$

Выразим из второго уравнения $n_1 = 3 - n_2 - n_0$. Подставив значение n_1 в первое уравнение, получим $2n_2 + 3 - n_2 - n_0 = 3$, т.е. $n_2 = n_0$. Тогда $n_1 = 3 - 2n_0$. Очевидно, что в этом случае возможно единственное решение, когда $n_2 = 0$, $n_1 = 3$, $n_0 = 0$. Группы Ассура, показанные на рис. 3, а, б, соответствуют полученному решению.

Найдем «фермы» Баранова при $n = 5$ и $\tau = 3$. Из третьего уравнения системы (8), когда $W = 3n - 2p_5 = 3$, получим $p_5 = \frac{15-3}{2} = 6$. При этом первое и второе уравнения системы (8) примут вид

$$2n_2 + n_1 = 3;$$

$$n_2 + n_1 + n_0 = 4.$$

Выразим из второго уравнения $n_1 = 4 - n_2 - n_0$. При подстановке этого значения n_1 в первое уравнение получим $2n_2 + 4 - n_2 - n_0 = 3$, или $n_2 = n_0 - 1$. И тогда $n_1 = 4 - n_0 + 1 - n_0 = 5 - 2n_0$. Пусть $n_0 = 1$, тогда $n_2 = 0$, $n_1 = 3$; если $n_0 = 2$, то $n_2 = 1$, $n_1 = 1$. Оба решения реализуемы (рис. 3, в, г). Несмотря на то, что значения звеньев n_i в решениях разные, полученные «фермы» содержат по три двухпарных и два трехпарных звеньев, однако разными являются числа кинематических пар этих звеньев, добавляемые в кинематическую цепь.

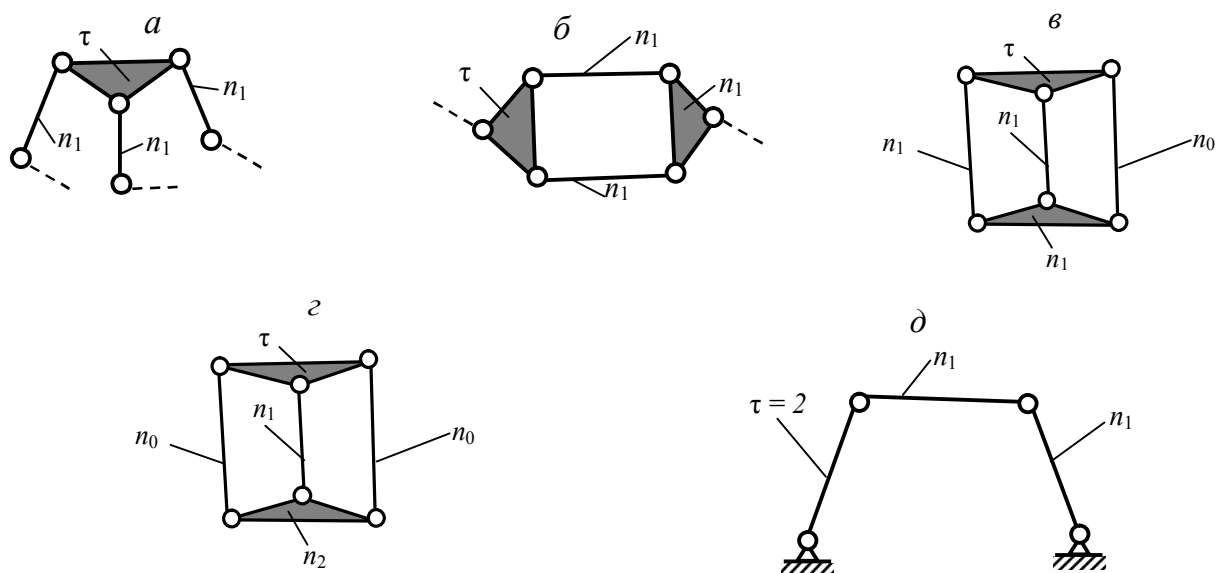


Рис. 3. Группы Ассура, «фермы» Баранова и четырехзвенный механизм

Обратимся к механизмам, у которых $W = 1$. Тогда при $\tau = 2$ из системы уравнений (8) получим три следующих уравнения:

$$p_5 = 2 + n_1, \quad (12)$$

$$n = 1 + n_1 + n_0, \quad (13)$$

$$3n - 2p_5 = 1. \quad (14)$$

Из уравнения (13) выразим число звеньев, добавляющих в цепь по одной кинематической паре $n_1 = n - 1 - n_0$. Подставим это значение в уравнение (12) и получим $p_5 = 2 + n - 1 - n_0$, тогда уравнение (14) примет вид $3n - 2p_5 = 3n - 4 - 2n + 2 + 2n_0 = 1$, откуда $n + 2n_0 = 3$. При $n_0 = 0$ имеем $n = 3$, $n_1 = 2$. На рис. 3, д показан механизм, соответствующий полученному решению. При назначении $n_0 = 1$ система решения не имеет.

Выводы. Получена универсальная структурная система (8), которая может быть использована для поиска любых кинематических цепей, в том числе цепей Грюблера, групп Ассура, «ферм» Баранова и механизмов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дворников Л.Т., Гудимова Л.Н. Обоснование взаимозависимостей между параметрами, определяющими структуру плоских шарнирных кинематических цепей // Вестник КузГТУ. 2009. № 1. С. 44 – 47.

2. Пейсах Э.Е. О структурном синтезе рычажных механизмов (комментарии к статье Л.Т. Дворникова «Опыт структурного синтеза механизмов», напечатанной в журнале «Теория механизмов и машин». 2004. № 2(4)) // Теория механизмов и машин. 2005. № 1 (5). Т. 3. С. 77 – 80.
3. Grübler M. Allgemeine Eigenschaften für Zwangläufigen ebenen kinematischen Ketten. – Civing. 1883. Bd. 29. S. 167 – 200.
4. Дворников Л.Т., Федоров А.И. О сущности и возможности метода М. Грюблера применительно к синтезу структур плоских механизмов. Материалы шестнадцатой научно-практической конференции по проблемам механики и машиностроения. – Новокузнецк: изд. СибГИУ, 2006. С. 82 – 94.
5. Ассур Л.В. Исследование плоских стержневых механизмов с низшими парами с точки зрения их структуры и классификации. – М.: Машиностроение, 1952. – 588 с.
6. Баранов Г.Г. Классификация, строение, кинематика и кинетостатика плоских механизмов с парами первого рода. Труды Ин-та машиноведения АН СССР. Семинар по ТММ. 1952. Вып. 46. № 2. С. 16 – 39.
7. Дворников Л.Т. Новые формализации в структуре механизмов // Изв. вуз. Машиностроение. 1993. № 1. С. 3 – 8.

© 2013 г. Л.Т. Дворников, Л.Н. Гудимова
Поступила 12 мая 2012 г.