УДК 622.6

Э.Я. Живаго, Н.И. Михайленко

Сибирский государственный индустриальный университет

РЕШЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРИНЦИПА ДАЛАМБЕРА

Принцип Даламбера сформулирован в 1743 г. и является одним из общих принципов механики. В литературе встречаются и другие названия: *метод кинетостатики*, *петербургский принцип*, а также принцип Германа – Эйлера – Даламбера.

Согласно этому принципу, *если в любой момент времени к действующим на точку силам как активным, так и реакции связи присоединить силу инерции, то полученная система сил будет уравновешенной (эквивалентной нулю)*, то есть

$$\overline{F}+\overline{R}+\overline{\Phi}=0,(\overline{F},\overline{R},\overline{\Phi})\sim 0, \qquad (1)$$

где $\overline{F}$ – активная сила; $\overline{R}$ – реакция связи; $\overline{\Phi}$ – сила инерции материальной точки, по модулю равная произведению массы m точки на модуль ее ускорения a и направленная противоположно этому ускорению:

$$\overline{\Phi}=-m\overline{a};\quad \Phi=ma. \qquad (2)$$

Следует отметить, что в формулировке принципа Даламбера говорится об уравновешенности системы сил, а не о равновесии (покое) материальной точки.

Так как ускорение точки складывается из касательной и нормальной составляющих $(\overline{a}=\overline{a}_\tau+\overline{a}_n)$, то сила инерции тоже может быть представлена двумя составляющими – касательной и нормальной (рис. 1):

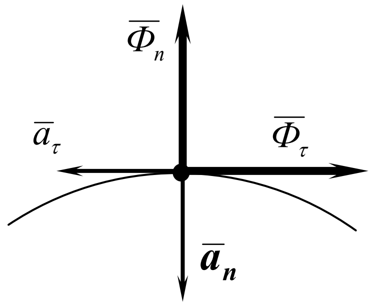

Рис. 1. Составляющие силы инерции и ускорения точки при ее движении по кривой

$$\overline{\Phi}=\overline{\Phi}_\tau+\overline{\Phi}_n, \qquad (3)$$

где $\overline{\Phi}_\tau=-m\overline{a}_\tau$, $\Phi_\tau=ma_\tau=m\dfrac{dV}{dt}$; $\overline{\Phi}_n=-m\overline{a}_n$,

$$\Phi_n=ma_n=m\frac{V^2}{\rho};$$

здесь V − скорость точки; ρ − радиус кривизны траектории.

Если точка принадлежит телу, вращающемуся вокруг оси с угловой скоростью ω и угловым ускорением ε (рис. 2), то

$$\Phi_\tau=ma_\tau=m\varepsilon r;\quad \Phi_n=ma_n,=m\omega^2 r. \qquad (4)$$

Если точка совершает сложное движение, то ее абсолютное ускорение складывается из относительного, переносного ускорений и ускорения Кориолиса:

$$\overline{a}_a=\overline{a}_r+\overline{a}_e+\overline{a}_c.$$

Соответствующие силы инерции составят

$$\overline{\Phi}_r=-m\overline{a}_r,\quad \overline{\Phi}_e=-m\overline{a}_e,\quad \overline{\Phi}_c=-m\overline{a}_c.$$

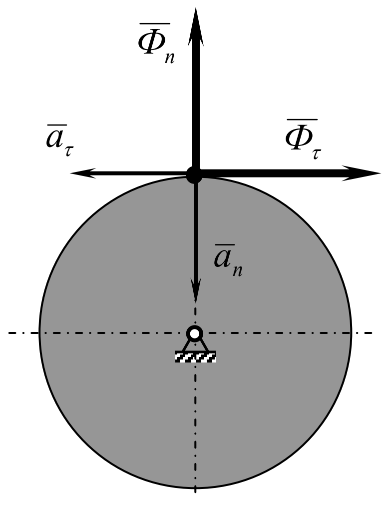

Рис. 2. Составляющие силы инерции и ускорения точки, принадлежащей вращающемуся телу

Рассмотрим механическую систему, состоящую из *n* материальных точек, которые под действием внешних и внутренних сил движутся по отношению к инерциальной системе отсчета с ускорением $\bar{a}_k$. Применяя к каждой точке системы принцип Даламбера, получим

$$\bar{F}_k+\bar{R}_k+\bar{\Phi}_k=0,\ k=1,2,\ldots n;\qquad (\bar{F}_k,\bar{R}_k,\bar{\Phi}_k)\sim 0,\ k=1,2,\ldots n \tag{5}$$

и придем к результату, выражающему принцип Даламбера для системы: если в любой момент времени к каждой из точек системы кроме действующих на нее внешних и внутренних сил присоединить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной (эквивалентной нулю).

Математически принцип Даламбера для системы записывается *n* равенствами вида (5).

Значение принципа Даламбера состоит в том, что при непосредственном его применении к задачам динамики уравнения движения системы составляются в форме хорошо известных уравнений равновесия, что делает единым подход к решению задач и часто упрощает соответствующие расчеты.

Просуммировав все уравнения (5), получим одно:

$$\sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k+\sum_{k=1}^{n}\bar{R}_k+\sum_{k=1}^{n}\bar{\Phi}_k=0. \tag{6}$$

Умножим каждое из равенств (5) на радиус–вектор $\bar{r}_k$ k-й точки и, просуммировав их, получим

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{n}\bar{r}_k\times\bar{F}_k+\sum_{k=1}^{n}\bar{r}_k\times\bar{R}_k+\sum_{k=1}^{n}\bar{r}_k\times\bar{\Phi}_k=0;\\ \sum_{k=1}^{n}\bar{M}_O(\bar{F}_k)+\sum_{k=1}^{n}\bar{M}_O(\bar{R}_k)+\sum_{k=1}^{n}\bar{M}_O(\bar{\Phi}_k)=0,\end{gathered} \tag{7}$$

где $\bar{M}_O$ − вектор момента силы относительно выбранного центра (точки *O*).

В проекциях на оси декартовой системы координат, начало которых совпадает с центром *O*, получим шесть уравнений равновесия пространственной произвольной системы сил:

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{n}F_{kx}+\sum_{k=1}^{n}R_{kx}+\sum_{k=1}^{n}\Phi_{kx}=0;\\ \sum_{k=1}^{n}F_{ky}+\sum_{k=1}^{n}R_{ky}+\sum_{k=1}^{n}\Phi_{ky}=0;\\ \sum_{k=1}^{n}F_{kz}+\sum_{k=1}^{n}R_{kz}+\sum_{k=1}^{n}\Phi_{kz}=0;\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{n}M_x(\bar{F}_k)+\sum_{k=1}^{n}M_x(\bar{R}_k)+\sum_{k=1}^{n}M_x(\bar{\Phi}_k)=0;\\ \sum_{k=1}^{n}M_y(\bar{F}_k)+\sum_{k=1}^{n}M_y(\bar{R}_k)+\sum_{k=1}^{n}M_y(\bar{\Phi}_k)=0;\\ \sum_{k=1}^{n}M_z(\bar{F}_k)+\sum_{k=1}^{n}M_z(\bar{R}_k)+\sum_{k=1}^{n}M_z(\bar{\Phi}_k)=0.\end{gathered} \tag{8}$$

Обозначим главные векторы активных сил $\bar{F}=\sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k$, реакций связей $\bar{R}=\sum_{k=1}^{n}\bar{R}_k$ и сил инерции $\bar{\Phi}=\sum_{k=1}^{n}\bar{\Phi}_k$, главные моменты активных сил $\bar{M}_O^F=\sum_{k=1}^{n}\bar{M}_O(\bar{F}_k)$, реакций связей $\bar{M}_O^R=\sum_{k=1}^{n}\bar{M}_O(\bar{R}_k)$ и сил инерции $\bar{M}_O^\Phi=\sum_{k=1}^{n}\bar{M}_O(\bar{\Phi}_k)$.

Если силы, действующие на точку, разложить на внешнюю $\bar{F}_k^e$ и внутреннюю $\bar{F}_k^i$, то уравнение (5) примет вид

$$\bar{F}_k^e+\bar{F}_k^i+\bar{\Phi}_k=0$$

Согласно свойствам внутренних сил системы их главный вектор и главный момент относительно любого центра приведения равны нулю, и уравнения (6) и (7) можно переписать:

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k^e+\sum_{k=1}^{n}\bar{\Phi}_k=0;\\ \sum_{k=1}^{n}\bar{M}_O(\bar{F}_k^e)+\sum_{k=1}^{n}\bar{M}_O(\bar{\Phi}_k)=0\quad,\end{gathered} \tag{9}$$

Полученные уравнения аналогичны (6) и (7), но в них не входят внутренние силы.

Понятие о силе инерции и принцип Даламбера составляют основу метода кинетостатики, главной целью которого является применение методов статики к задачам динамики машин и механизмов. Чтобы пользоваться этим методом, нужно уметь вычислять главный вектор и главный момент сил инерции.

Главный вектор сил инерции механической системы, в частности твердого тела, равен произведению массы системы (тела) и направлен противоположно этому ускорению:

$$\bar{\Phi}=-m\bar{a}_C. \tag{10}$$

Главный момент сил инерции механической системы (твердого тела) относительно некоторого центра *O* или оси *z* равен взятой со знаком минус производной по времени от кинетического момента системы (тела) относительно того же центра или той же оси:

$$\overline{M}_O^{\Phi} = -\frac{d\overline{K}_O}{dt} \text{ и } M_z^{\Phi} = -\frac{dK_z}{dt}. \qquad (11)$$

Если движение точек механической системы рассматривать как сложное, т.е. $\bar{r}_k = \bar{r}_C + \bar{\rho}_k$, то

$$\overline{K}_O = \overline{K}_C^{(r)} + \bar{r}_C \times M\overline{V}_C,$$

где $\overline{K}_C^{(r)} = \sum \bar{\rho}_k \times m_k \overline{V}_k^{(r)}$ – главный момент количества движения системы в ее относительном движении по отношению к системе координат, движущейся поступательно вместе с центром масс.

В этом случае главный момент сил инерции относительно неподвижного центра приведения O запишется как

$$\overline{M}_O^{\Phi} = -\frac{d\overline{K}_O}{dt} = -\frac{d\overline{K}_C^{(r)}}{dt} - M\bar{r}_C \times \bar{a}_C. \qquad (12)$$

Силы инерции точек механической системы можно привести к центру масс, который может быть подвижной точкой. В этом случае главный момент сил инерции относительно центра масс будет представлен в виде

$$\overline{M}_C^{\Phi} = -\frac{d\overline{K}_C^{(r)}}{dt} \qquad (13)$$

(производная в выражении (13) полная, поскольку угловая скорость подвижной системы координат равна нулю).

В общем случае систему сил инерции можно привести к одной силе и к одной паре сил.

В частных случаях:

1 − при поступательном движении силы инерции твердого тела приводятся к равнодействующей $\overline{\Phi}$, линия действия которой проходит через центр масс тела;

2 − при вращении тела вокруг неподвижной оси главный момент сил инерции относительно оси вращения равен произведению осевого момента инерции на угловое ускорение.

Так как $K_z = J_z\omega$, то равенство (11) можно записать в виде

$$M_z^{\Phi} = -J_z\frac{d\omega}{dt},$$

или
$$M_z^{\Phi} = -J_z\varepsilon. \qquad (14)$$

Главные моменты сил инерции (центробежные моменты инерции) относительно осей, лежащих в плоскости, перпендикулярной оси вращения, запишутся так:

$$M_x^{\Phi} = J_{xz}\varepsilon - J_{yz}\omega^2; \; M_y^{\Phi} = J_{yz}\varepsilon + J_{xz}\omega^2; \qquad (15)$$

3 − в случае плоскопараллельного движения система сил инерции будет представлена и главным вектором, и главным моментом сил инерции относительно оси, проходящей через центр масс:

$$\overline{\Phi} = -m\bar{a}_C, \; M_{zC}^{\Phi} = -J_{zC}\varepsilon. \qquad (16)$$

С учетом полученных выше соотношений для проекций главного вектора и главного момента сил инерции, а также выражений для проекций главного вектора и главного момента реакций связей уравнения принципа Даламбера (8) принимают вид

$$\begin{gathered}
F_x + X_A + X_B + m\varepsilon y_C + m\omega^2 x_C = 0; \\
F_y + Y_A + Y_B - m\varepsilon x_C + m\omega^2 y_C = 0; \\
F_z + Z_A = 0; \\
M_x^F + Y_A l_A - Y_B l_B + J_{xz}\varepsilon - J_{yz}\omega^2 = 0; \\
M_y^F - X_A l_A + X_B l_B + J_{yz}\varepsilon + J_{xz}\omega^2 = 0; \\
M_z^F - J_z\varepsilon = 0.
\end{gathered} \qquad (17)$$

Эти шесть уравнений полностью описывают характеристики вращающегося твердого тела. Особым из них является последнее уравнение – это дифференциальное уравнение вращательного движения. Первые пять уравнений служат для определения пяти величин реакций опор: X_A, Y_A, Z_A, X_B и Y_B.

Величины реакций, получаемые из уравнений (17), в общем случае зависят от характера вращения тела (кроме реакции Z_A), т.е. от величины угловой скорости и углового ускорения. Такие реакции называются динамическими в отличие от статических реакций неподвижного тела.

Динамические реакции могут быть значительно больше статических (см. примеры 1 и 2).

Пример 1. Маховое колесо, насаженное посередине вала с небольшим перекосом $\alpha = 1^\circ \left(\frac{\pi}{180}\text{рад}\right)$ к поперечной оси, вращается с постоянной угловой скоростью ω (n = 3000 об/мин). Определить добавочные динамические давления на подшипники вала, считая, что масса маховика m=100 кг, центр тяжести расположен на оси вращения вала, радиус маховика R = 1 м, расстояние между подшипниками a = 1 м. Массу считать равномерно распределенной по ободу (рис. 3).

Воспользуемся уравнениями (17). Выберем оси координат *Oxyz* как показано на рис. 3. Реакцию каждого из подшипников представим двумя составляющими N_{Ax}, N_{Ay}, N_{Bx}, N_{By}, и, учитывая, что маховое колесо вращается равномерно (ε=0), а центр его находится на оси вращения вала (x_C= y_C=0), получим

$$N_{Ax} + N_{Bx} = 0; \quad N_{Ay} + N_{By} = 0; \qquad \text{(a)}$$
$$m_x(\overline{N}_A) + m_x(\overline{N}_B) = \omega^2 J_{yz};$$
$$m_y(\overline{N}_A) + m_y(\overline{N}_B) = -\omega^2 J_{xz};$$

с учетом того, что

$$m_x(\overline{N}_A) = -N_{Ay} \cdot \frac{a}{2}, \; m_x(\overline{N}_B) = N_{By} \frac{a}{2};$$
$$m_y(\overline{N}_A) = N_{Ax} \cdot \frac{a}{2}, \; m_y(\overline{N}_B) = -N_{Bx} \cdot \frac{a}{2},$$

получим

$$N_{Ax} + N_{Bx} = 0, \, N_{Ay} + N_{By} = 0; \qquad \text{(b)}$$
$$\frac{a}{2}(N_{By} - N_{Ay}) = \omega^2 J_{yz}, \; \frac{a}{2}(N_{Ax} - N_{Bx}) = -\omega^2 J_{xz}.$$

Решим систему уравнений (b)

$$N_{Ax} = -N_{Bx} = -\frac{\omega^2 J_{xz}}{a}, \; N_{By} = -N_{Ay} = \frac{\omega^2 J_{yz}}{a}. \quad \text{(c)}$$

Для вычисления центробежных моментов инерции J_{xz} и J_{yz} введем в рассмотрение главные оси инерции $Ox_1y_1z_1$ (рис. 3).

По известным формулам геометрии масс имеем

$$J_{xz} = 0;$$

$$J_{yz} = \frac{1}{2}(J_{z_1} - J_{y_1})\sin 2\alpha,$$

где J_{y_1}, J_{z_1} – моменты инерции колеса относительно указанных главных осей.

Так как $J_{y_1} = \frac{mR^2}{2}$, $J_{z_1} = mR^2$, то $J_{yz} = \frac{mR^2}{4}\sin 2\alpha.$

Подставляя значения центробежных моментов инерции в формулы (c), получим окончательные выражения для динамических реакций подшипников

$$N_{Ax} = N_{Bx} = 0;$$
$$N_{By} = -N_{Ay} = \frac{mR^2\omega^2}{4a}\sin 2\alpha.$$

Если значение угла α мало, то $\sin 2\alpha = 2\alpha$, а

$$N_{By} = -N_{Ay} \approx \frac{mR^2\omega^2\alpha}{2a} = 86{,}2 \text{ кН}.$$

Полученные результаты показывают, что в данной задаче вследствие неуравновешенности система реакций эквивалентна одной паре, стремящейся повернуть колесо так, чтобы угол α стал равным нулю.

Динамические давления на подшипники равны по величине найденным реакциям и противоположны им по направлениям.

Пример 2. Маятник центробежного регулятора делает при установившемся движении 180 об/мин. Вследствие изменения нагрузки машины регулятор приведен в действие, и шары раздвигаются с относительной скоростью V_r = 0,2 м/с. Считая вес каждого шара равным 10 кг и пренебрегая весом ручек, вычислить дополнительное давление на подшипники C_1 и

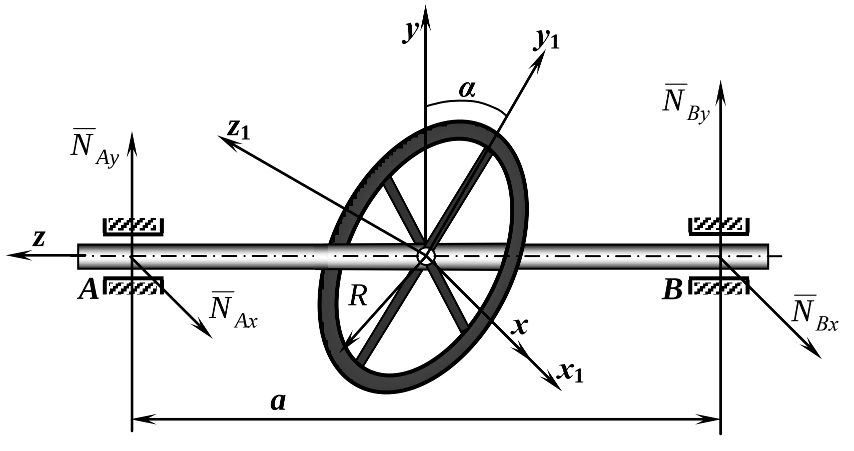

Рис. 3. Определение динамического давления на подшипники

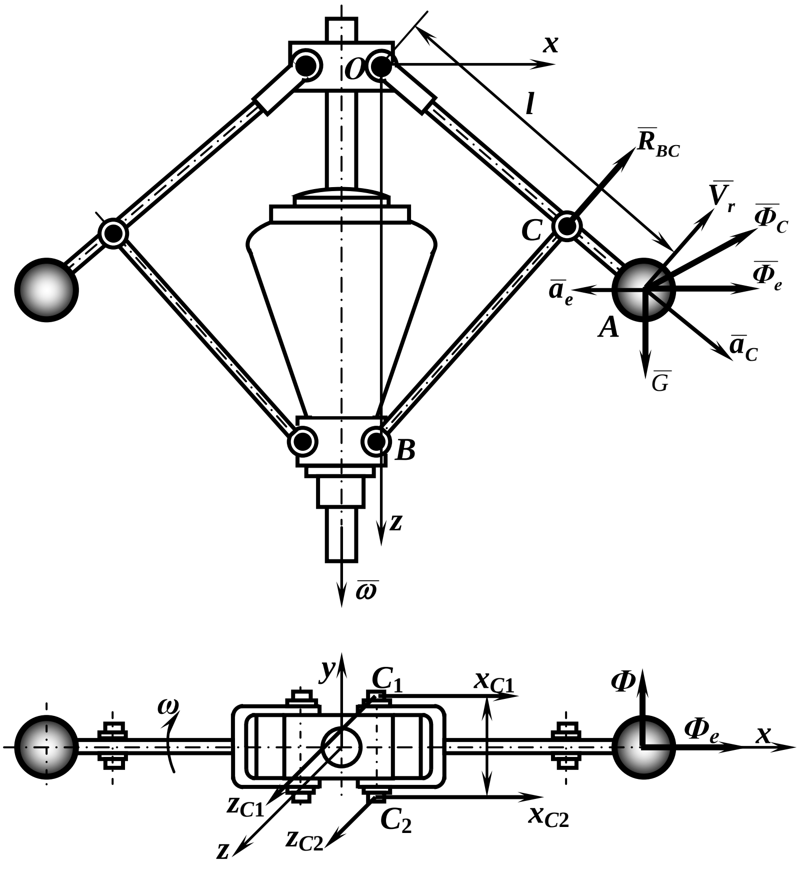

Рис. 4. Определение дополнительного давления, вызываемого ускорением Кориолиса

C_2, вызываемое ускорением Кориолиса. При этом считать угол, образуемый ручкой с осью регулятора, равным 45° и число оборотов не изменившимся; размеры подвески: l = 25 см, d = 2,5 см (рис. 4).

Освободим стержень OA от связей, стержня BC и подшипников C_1 и C_2, заменив их реакциями $\overline{R}_{BC}, \overline{X}_{C_1}, \overline{Z}_{C_1}, \overline{X}_{C_2}, \overline{Z}_{C_2}$.

Шар, который считаем точкой, совершает сложное движение, и его абсолютное ускорение складывается из относительного, переносного ускорений и ускорения Кориолиса, т.е. $\overline{a}_a = \overline{a}_r + \overline{a}_e + \overline{a}_c$. Соответствующие силы инерции будут такими: $\overline{\Phi}_r = -m\overline{a}_r$, $\overline{\Phi}_e = -m\overline{a}_e$, $\overline{\Phi}_c = -m\overline{a}_c$.

Учитывая, что угловая скорость переносного движения ω и относительная скорость шара V_r величины постоянные, a_r = 0, $\overline{a}_e = \overline{a}_e^{\,n}$, $\overline{a}_C = 2(\overline{\omega} \times \overline{V}_r)$.

При определении дополнительного давления силу $\overline{\Phi}_e$ и силу тяжести $\overline{P}$ не будем учитывать.

Сила инерции Кориолиса

$$\Phi = \frac{2P}{g}\omega V_r \cdot \sin 45° \qquad \text{(d)}$$

направлена по перпендикуляру плоскости, в которой расположены векторы $\overline{\omega}$ и $\overline{V}_r$.

Введем координатные оси Oz и Ox, расположив их в плоскости стержней OA и BC. Составляя уравнения равновесия, замечаем, что ни в одно из них силы $\overline{R}$ и $\overline{\Phi}$ не входят одновременно, а это значит, что сила $\overline{\Phi}$ не оказывает влияния на реакцию $\overline{R}$.

Дополнительные давления на подшипники C_1 и C_2 от силы $\overline{\Phi}$ найдем, предварительно определив реакции X_{C_1}, X_{C_2}, Y_{C_1}, Y_{C_2} из четырех уравнений равновесия

$$\sum_{k=1}^{n} X_k = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} Y_k = 0;$$
$$\sum_{k=1}^{n} M_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} M_{kx} = 0,$$

которые в явном виде выглядят так:

$$X_{C_1} + X_{C_2} = 0;$$
$$Z_{C_1} + Z_{C_2} = 0;$$
$$-X_{C_1}\frac{d}{2} + X_{C_2}\frac{d}{2} + \Phi l \sin 45° = 0; \qquad \text{(e)}$$
$$Z_{C_1}\frac{d}{2} - Z_{C_2}\frac{d}{2} + \Phi l \sin 45° = 0.$$

Первые два уравнения системы показывают, что дополнительные реакции образуют пару сил.

Из системы уравнений вытекает, что

$$\left|\overline{X}_{C_1}\right| = \left|\overline{Z}_{C_1}\right| = \left|\overline{X}_{C_2}\right| = \left|\overline{Z}_{C_2}\right| = \Phi\frac{l}{d}\sin 45° \qquad \text{(f)}$$

и, следовательно, дополнительное давление

$$N = \sqrt{X_{C_1}^2 + Z_{C_1}^2} = \Phi\frac{l}{d}. \qquad \text{(g)}$$

Из формул (f) и (g) вытекает, что дополнительные давления направлены вдоль стержня, поэтому эту задачу можно решить, сведя вопрос к изучению равновесия системы сил, расположенных в плоскости, содержащей стержень *OA* и силу *Ф*.

Принимая во внимание соотношения (d) и (g), получим

$$N = \frac{2Pl}{dg}u\omega\sin 45°,$$

откуда после подстановки числовых значений определим

$$N = \frac{2\cdot 10\cdot 0{,}25}{0{,}025}\cdot 0{,}2\cdot 6\pi\frac{\sqrt{2}}{2} = 533\,\text{Н}.$$

С развитием научно-технического прогресса скорости вращения деталей машин возросли до нескольких десятков, а в некоторых условиях до сотен тысяч оборотов в минуту. При таких скоростях даже незначительная неуравновешенная масса может привести к выходу из строя и аварии механизма или аппарата.

Балансировка (уравновешивание) вращающихся машинных частей (ротора турбины или электродвигателя, коленчатого вала, шкивов и других) является важной технической задачей. Для большинства роторов машин осью вращения является ось, проходящая через центры опорных поверхностей цапф изделия. Несовпадение этой оси с главной центральной осью инерции (что может быть результатом погрешностей технологии изготовления изделия либо его конструктивных особенностей) приводит к появлению нескомпенсированных центробежных сил и моментов, вызывающих быстрый износ подшипников, повышенные вибрации машины, изгибные колебания ее элементов и др.

Из уравнений (17) видно, что наличие вращения не будет влиять на значение реакций, если

$$m\varepsilon y_C + m\omega^2 x_C = 0;\ -m\varepsilon x_C + m\omega^2 y_C = 0;$$
$$J_{xz}\varepsilon - J_{yz}\omega^2 = 0;\ J_{yz}\varepsilon + J_{xz}\omega^2 = 0,$$

а точнее

$$x_C = 0;\ \ y_C = 0; \qquad (18)$$
$$J_{xz} = 0;\ \ J_{yz} = 0. \qquad (19)$$

Равенства (18) и (19) – это условия равенства динамических и статических реакций, или условия динамической уравновешенности вращающегося тела при его вращении вокруг оси z.

Для того чтобы динамические реакции не отличались от статических, должны выполняться следующие условия: 1) центр масс должен лежать на оси вращения; 2) ось вращения должна быть главной центральной осью инерции тела.

Ось *Oz*, для которой центробежные моменты инерции J_{xz} и J_{yz}, содержащие в своих индексах наименование этой оси, равны нулю, называется главной осью инерции тела для точки *O*. Если тело имеет ось симметрии, то эта ось является главной осью инерции тела для любой своей точки. Если тело имеет плоскость симметрии, то любая ось перпендикулярная этой плоскости будет главной осью инерции тела для точки *O*, в которой ось пересекает плоскость.

Таким образом, динамические реакции равны статическим, если ось вращения является одной из главных центральных осей инерции.

Механический смысл центробежных моментов инерции J_{xz} и J_{yz} заключается в том, что они характеризуют степень динамической неуравновешенности тела при вращении вокруг оси *Oz*.

Динамическое уравновешивание – важная техническая задача, которая сводится к определению главных центральных осей инерции.

Любую ось можно сделать главной центральной осью инерции, если добавить к телу (или отнять у него) две точечные массы. Пусть для тела массой *M* величины x_C, y_C, J_{xz}, J_{yz} известны и не равны нулю. Прибавим к телу две массы m_1 и m_2 в точках с координатами (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2).

Тогда из формул

$$x_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k x_k, \;\; y_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k y_k,$$
$$z_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k z_k, \;\; J_{xy} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k y_k,$$
$$J_{yz} = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k z_k, \;\; J_{zx} = \sum_{k=1}^{n} m_k z_k x_k$$

следует, что если удовлетворить равенствам

$$Mx_C + m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0, \quad My_C + m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0,$$
$$J_{xz} + m_1 x_1 z_1 + m_2 x_2 z_2 = 0,$$
$$J_{yz} + m_1 y_1 z_1 + m_2 y_2 z_2 = 0, \qquad (20)$$

то для полученного тела будет $x'_C = y'_C = J'_{xz} = J'_{yz} = 0$, то есть ось Oz станет главной центральной осью инерции. Подбирая массы m_1, m_2 и их положения так, чтобы удовлетворились уравнения (20), мы и решим поставленную задачу. Частью величин при этом следует задаться наперед. Например, можно задать значения m_1, m_2 и z_1, z_2 (но так, чтобы было $z_1 \neq z_2$), а x_1, y_1, x_2, y_2 найти из уравнений (20) или задать положение (координаты) точечных масс, а найти m_1, m_2 и тому подобное.

Такой метод уравновешивания вращающихся тел широко используется в технике для уравновешивания коленчатых валов (см. нижепреведенный пример *3*), кривошипов, спарников и т.п.

Пример 3. Коленчатый вал одноцилиндрового двигателя несет на себе два одинаковых маховика *A* и *B* радиусом r = 0,5 м. Рассматривая щеки и шейку колена вала как груз массой m = 21 кг, находящийся на расстоянии h = 0,2 м от оси, определить массы m_A и m_B грузов, которые нужно расположить на ободах маховиков, чтобы сбалансировать систему, если b = 0,6 м, l = 1,4 м (рис. 5). Для определения точечных масс воспользуемся равенствами (20):

$$\begin{aligned} &Mx_C + m_A x_A + m_B x_B = 0;\\ &My_C + m_A y_A + m_B y_B = 0;\\ &J_{xz} + m_A x_A z_A + m_B x_B z_B = 0;\\ &J_{yz} + m_A y_A z_A + m_B y_B z_B = 0. \end{aligned} \qquad (h)$$

Проведем координатные оси, вращающиеся вместе с телом, так, чтобы колено вала лежало в плоскости *Oxz*. Тогда эта плоскость будет плоскостью симметрии. Следовательно, $y_C = 0$, и так как при этом ось *Oy* будет для точки *O* главной осью инерции, то $J_{yz} = 0$. Кроме того, если обозначить массу всей системы через *M*, то для нее $x_C = mh/M$ и $J_{xz} = mhb$.

Последний результат следует из того, что центробежный момент инерции системы равен сумме моментов инерции ее частей, а для маховиков и примыкающих к ним частей вала центробежные моменты J_{xz} равны нулю (ось *Oz* – ось симметрии). Для присоединяемых грузов координаты $y_A = y_B = 0$.

С учетом этого из равенств (h) останется два:

$$\begin{aligned} &Mx_C + m_A x_A + m_B x_B = 0;\\ &J_{xz} + m_A x_A z_A + m_B x_B z_B = 0. \end{aligned} \qquad (i)$$

Так как грузы располагаются на ободах маховиков, то $z_A = 0$, $z_B = l$ и $x_A = x_B = -r$ (при знаке плюс уравнения не имеют решений, следовательно, грузы должны быть внизу).

Подставим значения координат в уравнения (i) и получим

$$M\frac{mh}{M}_C - m_A r - m_B r = 0; \qquad (j)$$

$$mhb - m_A r \cdot 0 - m_B r \cdot l = 0 \cdot \qquad (k)$$

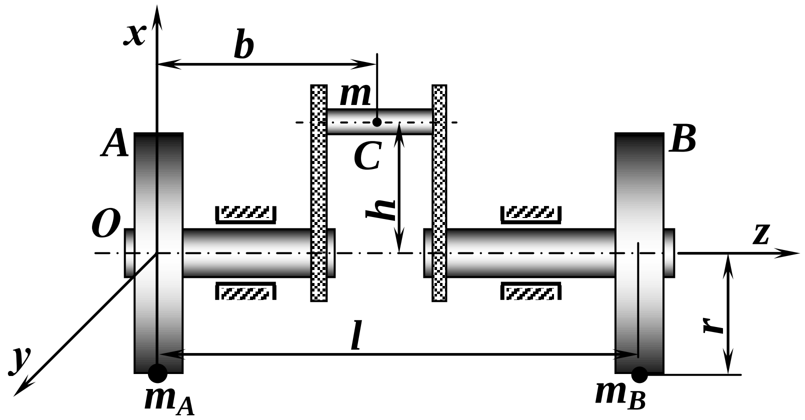

Рис. 5. Балансировка коленчатого вала одноцилиндрового двигателя

Решая уравнения, найдем:
из уравнения (k)

$$m_B = \frac{bhm}{rl} = 3{,}6 \text{ кг};$$

из уравнения (j)

$$m_A = \frac{(l-b)hm}{rl} = 4{,}8 \text{ кг}.$$

Присоединение этих грузов делает систему уравновешенной, а ось *Oz* – главной центральной осью инерции (но не осью симметрии) тела.

Выводы. Показано применение принципа Даламбера для уравновешенности системы сил, действующих на систему материальных точек. Приведены конкретные примеры решения технических задач.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Курс теоретической механики / Под ред. К.С. Колесникова. − М.: изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. Т. 1. – 735 с.
2. Теоретическая механика. Учебник для вузов / Г.Т. Баранова, Т.Н. Дадочкина, В.В. Дрожжин и др; под общ. ред. Э.Я. Живаго. – Старый Оскол: изд. ТНТ, 2013. – 384 с.
3. Сборник заданий по теоретической механике. Динамика: Учебное пособие / Под ред. В.В. Дрожжина, 2-е изд., испр. – СПб.: «Лань», 2012. – 384 с.

Поступила 22 сентября 2015 г.