

А.Н. Савельев, С.В. Козлов, Э.Я. Живаго, О.Д. Прохоренко

Сибирский государственный индустриальный университет

ФОРМИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В МНОГОДВИГАТЕЛЬНОМ ГИДРОПРИВОДЕ ХОЛОДИЛЬНИКОВ МНЛЗ

Холодильники металла, используемые в машинах непрерывного литья заготовок (МНЛЗ), представляют собой набор подвижных и неподвижных балок, на которых располагается охлаждаемый металл. Подвижные балки подводятся к металлу, поднимают его в вертикальной плоскости, перемещают в горизонтальной плоскости и затем опускают на новое место, расположенное от прежнего на один шаг холодильника. Таким образом, металл перемещается вдоль холодильника от одного его конца к другому.

Электрогидравлическая система привода холодильника металла машины непрерывного литья заготовок представляет собой сложную структуру, в которой, как и во всех других сложных системах, совершается широкий спектр колебательных процессов [1 – 3]. Все эти процессы можно разделить на две группы: группу низкочастотных динамических процессов от изменения внешней технологической нагрузки [4] и группу динамических (волновых) процессов, возникновение которых зависит от скоростных параметров взаимодействия подвижных балок холодильника с металлом [5, 6]. Для описания этих процессов используются разные виды моделей. В первом случае используются динамические модели, включающие сосредоточенные массы и упругие безмассовые связи между ними [6, 7]. Второй вид динамических процессов моделируется моделями с распределенными по всему волноводу массами [8, 9]. При формировании моделей их формальная часть требует выполнения операций таким образом, чтобы этот выбор был рациональным в равной степени по сложности и по достоверности, что полностью определяется набором факторов, которые действуют на технические устройства.

Условия работы технологического оборудования металлургической промышленности характеризуются высокими энергосиловыми параметрами и связаны с ограничением габаритных размеров машин, высокими температурными воздействиями и значительными по величине динамическими нагрузками. Возни-

кающие в оборудовании динамические воздействия провоцируют появление в них волновых процессов, которые, складываясь с низкочастотными колебательными составляющими нагрузки, приводят к критическим ситуациям и, как результат, к выходу оборудования из строя [8].

В настоящей работе формируется модель многоволнового процесса, возникающего в гидроприводе холодильников МНЛЗ в результате ударного взаимодействия металла с подвижными балками холодильника.

В приводе подвижных балок холодильника при передаче энергии от делителя потока (рис. 1) к подвижным балкам холодильника в момент их соприкосновения с металлом ступенчато возрастает дополнительная нагрузка. Эта нагрузка определяет не только усилие, действующее на подвижные балки, но и скорость движения подвижных балок и всех элементов передаточного механизма привода. В результате действия низкочастотных динамических процессов происходит многократно повторяющийся продольный по элементам привода удар. Это связано с тем, что в реальных условиях работы привода холодильника скорость взаимодействия подвижных балок и металла постоянно меняется. Такое изменение вызывает целый каскад следующих друг за другом волн напряжений. Так, при взаимодействии массы металла с подвижными балками с относительной скоростью v_{01} формируется первая волна напряжений (рис. 2, а). При этом относительная скорость v_{01} уменьшается и ее значение приближается к нулю. Однако в приводе балок холодильника разность скоростей подвижных балок и металла определяется не только взаимодействием этих элементов, но и зависит от ряда других внешних и внутренних условий, и через время Δt возникнет новая разность скоростей v_{02} , которая формирует вторую упругую волну (рис. 2, б). Затем появится третья упругая волна (рис. 2, в) и т.д. При этом, если встречаются две и большее количество упругих волн, то общее напряжение в

этой точке определяется по принципу суперпозиции волн (рис. 2, з).

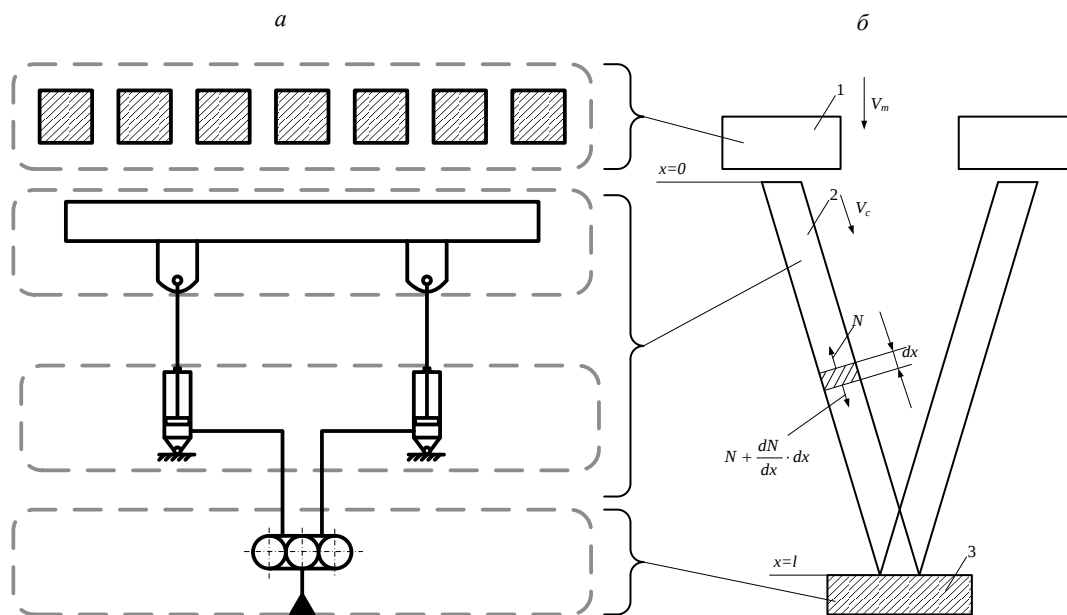


Рис. 1. Процесс перехода от реальной конструкции привода холодильника к расчетной схеме

В предлагаемом методе кривая изменения относительной скорости взаимодействующих подвижных балок холодильника с металлом представлена в виде дискретных величин с временным шагом Δt . Значение Δt при этом значительно меньше по величине периода колебаний относительной скорости взаимодействия масс металла и подвижных балок. В конце каждого шага в приводе балок формируется новая волна напряжений. После того, как волна пройдет несколько раз вдоль стержня, теряя при каждом проходе свою энергию, значение ее считается незначимым и в дальнейшем расчете не учитывается.

Определение напряжения в материале от каждой волны характеризуется следующими условиями. В силу того, что удар между подвижными балками и металлом плоский, его в каждый момент времени t можно рассматривать как линейное взаимодействие двух масс. Одна из этих масс соответствует приведенной массе элементов одного из двигателей привода холодильников и может быть представлена в виде стержня 2 с приведенными характеристиками упругости и плотности их материалов (рис. 1, б). Вторая масса – это масса охлаждаемого на холодильнике металла, приходящаяся на один двигатель привода холодильника. Эта масса в расчетной схеме представлена в виде единой массы 1. Между первой и второй массами в момент их контакта происходит удар. Известно, что в том случае, когда в некоторой точке упругой среды возникает какое-то возмущение, то из этой точки во все стороны начинают

излучаться упругие волны [6]. На расстоянии от центра возмущения эти волны можно рассматривать как плоские и считать, что все частицы материала в них движутся параллельно направлению распространения волны (продольные волны) или перпендикулярно этому направлению (поперечные волны). При исследовании продольных колебаний в стержне 2 (рис. 1, б) может быть использована гипотеза плоских сечений, в которой можно пренебречь наличием движения частиц перпендикулярно оси стержня и рассматривать только продольные колебания. Выделим элемент dx стержня 2 (рис. 1, б), по которому движется волна упругих напряжений, ограниченная двумя поперечными сечениями 1 и 2. Волна возникла в результате взаимодействия массы m охлаждаемого металла и стержня, которые двигались со скоростями V_m и V_c . Сначала будем считать, что проведен один акт взаимодействия массы m со стержнем с относительной скоростью $V_0 = V_m - V_c$. Прикладывая нагрузки, действующие на выделенный участок стержня, и применяя принцип Даламбера, получим уравнение

$$\frac{\partial N}{\partial x} dx - \rho F dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где N – продольная сила в сечении; ρ – приведенная плотность материала стержня; F – площадь поперечного сечения стержня; ξ – смещение этого поперечного участка вдоль оси x .

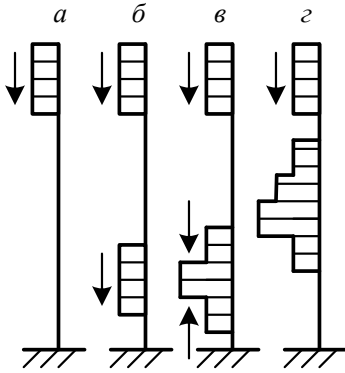


Рис. 2. Волновой процесс при многократном взаимодействии стержня с грузом

После выполнения ряда преобразований уравнения (1) приходим к следующему результату [6]:

$$\frac{1}{F} \frac{\partial}{\partial x} \left(F \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

где $a^2 = E/\rho$, E – приведенный модуль упругости материала стержня.

Приведенная площадь поперечного сечения стержня в данной расчетной схеме постоянная. В силу этого волновое уравнение продольных колебаний (2) может быть преобразовано в известную формулу Сен-Венана:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0. \quad (3)$$

Для решения уравнения Сен-Венана чаще всего используются три подхода: решение с помощью тригонометрических рядов, решение с помощью разрывных функций и решение по методу характеристик. В данном случае используется метод решения уравнения с помощью разрывных функций [10]. В основе этого решения лежит уравнение деформации слоя материала в стержне вида

$$\xi = f(at - x) + \varphi(at + x). \quad (4)$$

Физический смысл уравнения (4) сводится к следующему. Первое слагаемое $\xi_1 = f(at - x)$ представляет волну деформации, движущуюся вдоль стержня в направлении оси x со скоростью $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Точно так же второе слагаемое

$\xi_2 = \varphi(at + x)$ представляет волну деформации,

движущуюся с той же скоростью в противоположном направлении. Для использования уравнения (4) нужно выбрать вид функций f и φ так, чтобы выполнялись начальные и граничные условия. Эта задача в данном случае, согласно методу, изложенному в работе [10], решена следующим образом. Удар элемента 1 (рис. 1, б) производится по стержню 2 длиной l , второй конец которого закреплен на элементе 3. Начало координаты x помещено в точку удара. Тогда для закрепленного конца стержня ($x=l$) граничным условием будет $\xi_{x=l} = 0$. Подставляя в выражение (4) значение $\xi_{x=l}$, получим

$$f(at - x) + \varphi(at + x) = 0. \quad (5)$$

Так как в этом равенстве t может принимать любое значение, то уравнение (5) можно записать следующим образом:

$$\varphi(z) = -f(z - 2l),$$

где аргумент z , соответствующий пути, пройденному упругой волной в стержне, может принимать произвольные значения. Если провести определенную замену в выражении (5), то получим

$$\xi(x, t) = f(at - x) + \varphi(at + x - 2l). \quad (6)$$

Вид функции f можно определить, рассматривая взаимодействие стержня с ударяющимся грузом (рис. 1). Если считать, что груз движется вместе с концом стержня ($x=0$), то можно найти его силу инерции: $-m \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \right)_{x=0}$. Эта сила уравнивается продольной силой на конце стержня, равной $EF \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x=0}$. Таким образом, уравнение движения груза имеет следующий вид:

$$\left[-m \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \right) + EF \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \right]_{x=0} = 0,$$

или, поскольку $E = a^2 \rho$, получим

$$\left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \chi \frac{a^2 \partial \xi}{l \partial x} \right]_{x=0} = 0, \quad (7)$$

где $\chi = \frac{pFl}{m}$ – отношение массы стержня к массе металла на холодильнике.

Подставляя в уравнение (7) вместо ξ его значение (6) и заменяя величину at на значение z , получим

$$f''(z) - f''(z-2l) + \frac{\chi}{l} [f'(z) + f'(z-2l)] = 0; \quad (8)$$

здесь штрихи обозначают дифференцирование по аргументу.

Отсюда

$$f''(z) - \frac{\chi}{l} f'(z) = f''(z-2l) - \frac{\chi}{l} f'(z-2l) = 0. \quad (9)$$

Функциональное уравнение (9) связывает значения функции $f(z)$ со значениями этой функции для аргумента, меньшего на $2l$. Используя формулу (9) и начальные условия, можно шаг за шагом построить функцию $f(z)$.

До соприкосновения груза m со стержнем (т.е. при $t < 0$) для всех точек стержня смещения равны нулю, и при $z < 0$ имеем $f(z) = 0$.

Поэтому для интервала $0 < z < 2l$ правая часть уравнения (9) равна нулю:

$$f''(z) - \frac{\chi}{l} f'(z) = 0.$$

Интегрируя это уравнение, находим, что при $0 < z < 2l$

$$f'(z) = Ce^{-\frac{\chi}{l}z}.$$

Постоянная C определяется из условия, что в начальный момент $t=0$ скорость движения конца стержня ($x=0$) равна скорости взаимодействия груза со стержнем $v_0 = V_m - V_c$ (здесь V_m – линейная скорость груза; V_c – линейная скорость стержня). Тогда

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{t=0, x=0} = v_0.$$

Подставляя сюда выражение (6), получаем

$$a[f'(0) + f'(-2l)] = v_0.$$

Или, так как $f'(-2l) = 0$, запишем

$$C = f'(0) = \frac{v_0}{a}.$$

Таким образом, при $0 < z < 2l$ функция $f'(z)$ определяется выражением

$$f'(x) = \frac{v_0}{a} e^{-\frac{\chi}{l}z}. \quad (10)$$

Зная функцию $f(z)$ для значения $z < 2l$, можно определить изменение усилий и скоростей в любом сечении стержня: начиная с первого момента удара и до тех пор, пока $at < 2l - x$, т.е. пока до данного сечения не дойдет отраженная от опоры волна деформации.

При $at < 2l - x$ функция $f(at + x - 2l) = 0$, выражение (6) для перемещений имеет вид

$$\xi = f(at - x).$$

Соответственно скорость и деформация в любом сечении составят

$$\begin{aligned} v &= \frac{\partial \xi}{\partial t} = af'(at - x); \\ \varepsilon &= \frac{\partial \xi}{\partial x} = -f'(at - x). \end{aligned}$$

Подставляя сюда значение $f'(z)$, по формуле (10) найдем, что при $x < at < 2l - x$

$$\left. \begin{aligned} v &= v_0 e^{-\frac{\chi}{l}(at-x)}; \\ \varepsilon &= -\frac{v_0}{a} e^{-\frac{\chi}{l}(at-x)}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Пока волна деформации не дошла до опоры скорости и деформации в любом сечении оказываются связанными простым соотношением $v_0 = -a\varepsilon$. Однако эти функции являются разрывными: на фронте волны скорость скачкообразно изменяется от нуля до v_0 , а деформация – от нуля до $-\frac{v_0}{a}$. Таким образом, дефор-

мация стержня, возникающая в нем в первый момент удара, полностью определяется скоростью удара и не зависит от массы ударяющего груза.

Выше рассмотрен лишь первый этап удара, когда имеется только прямая волна деформации, идущая по стержню сверху вниз и обрат-

но. Для построения функции $f(z)$ следующего интервала изменения аргумента $-2l < z < 4l$ – нужно подставить в правую часть исходного уравнения найденное выше значение функции $f(z)$ для $0 < z < 2l$. В этом случае получим для интервала $2l < z < 4l$ уравнение вида

$$f''(z) + \frac{\chi}{l} f'(z) = -2 \frac{v_0 \chi}{al} e^{-\frac{\chi(z-2l)}{l}}. \quad (12)$$

Произвольная постоянная при интегрировании этого уравнения определяется из условия, что скорость груза, а значит и скорость конца стержня ($z=0$), не могут изменяться скачкообразно, т.е. что уравнение

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{z=0} = a[f'(at) - f'(at-2l)]$$

представляет собой непрерывную функцию. Это условие удовлетворяется, если разрывы функции $f'(z)$ будут в точности повторяться при изменении аргумента на $2l$. Так как при $z=0$ функция $f'(z)$ скачком увеличится на v_0/a , то этот же скачок повторится и при $z=2l$, $z=4l$, $z=6l$ и т.д. В частности, при $z=2l$ функция $f'(z)$ со значения, определяемого формулой (10)

$$f'(z-2l) = \left(\frac{v_0}{a} \right) e^{-2\chi},$$

должна увеличиться до

$$f'(z-2l) = \left(\frac{v_0}{a} \right) (e^{-2\chi} + 1).$$

Последнее значение $f'(z)$ и является начальным условием для интегрирования уравнения (12). Интегрируя это уравнение, получаем для интервала $2l < z < 4l$

$$f'(z) = \frac{v_0}{a} e^{-\frac{\chi z}{l}} + \frac{v_0}{a} \left(1 - 2\chi \frac{z-2l}{l} \right) e^{-\frac{\chi(z-2l)}{l}}.$$

Аналогично находим для интервала $4l < z < 6l$:

$$f'(z) = \frac{v_0}{a} e^{-\frac{\chi z}{l}} + \frac{v_0}{a} \left(1 - 2\chi \frac{z-2l}{l} \right) e^{-\frac{\chi(z-2l)}{l}} + \frac{v_0}{a} \left[1 - 2\chi \frac{z-4l}{l} \right] e^{-\frac{\chi(z-4l)}{l}}.$$

Таким образом, шаг за шагом можно сконструировать функцию $f'(z)$ для любых значений аргумента.

Далее можно интегрированием получить функцию $f(z)$, которая является непрерывной:

при $0 < z < 2l$

$$f(z) = \frac{v_0 l}{a \chi} \left(1 - e^{-\frac{\chi z}{l}} \right);$$

при $2l < z < 4l$

$$f(z) = \frac{v_0 l}{a \chi} \left[1 - e^{-\frac{\chi z}{l}} + \left(1 + 2\chi \frac{z-2l}{l} \right) e^{-\frac{\chi(z-2l)}{l}} \right];$$

при $4l < z < 6l$

$$f(z) = \frac{v_0 l}{a \chi} \left\{ 1 - e^{-\frac{\chi z}{l}} + \left(1 + 2\chi \frac{z-2l}{l} \right) e^{-\frac{\chi(z-2l)}{l}} - \left[1 + 2\chi^2 \left(\frac{z-2l}{l} \right)^2 \right] e^{-\frac{\chi(z-4l)}{l}} \right\}$$

и т.д.

Зная функцию $f'(z)$, можно найти перемещение x . Продифференцировав по z выражение (6), находим деформацию

$$\varepsilon = \frac{\partial x}{\partial t} = - \left[f'(at-z) + f'(at+z-2l) \right].$$

Расчет нагрузок в зоне контакта подвижных балок с металлом по вышеописанному методу удобен с применением вычислительной техники. Составленная по представленному методу программа позволяет моделировать картину нагружения элементов привода в зависимости от скоростных параметров зоны контакта подвижных балок с металлом при многократном процессе их взаимодействия.

Для учета многообразия волновых потоков необходимо знать характер принудительного изменения разности относительных скоростей U_0 подвижных балок и металла.

Определение скоростных характеристик в зоне контакта подвижных балок холодильника с металлом может быть получено путем рассмотрения динамики низкочастотных колебаний элементов привода, выполненного в рабо-

тах [11 – 12]. В этих работах весь привод представлен в виде дискретной восьмимассовой динамической модели с упругими связями и зазорами в связях.

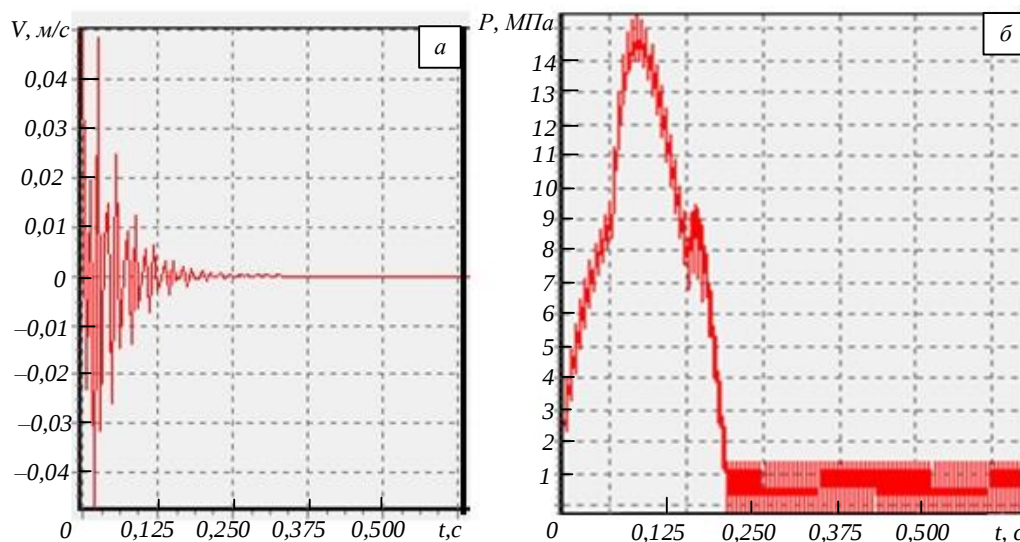


Рис. 3. Характер изменения скорости взаимодействия подвижных балок холодильника с металлом (а) и давления от волновой нагрузки (б) в одной ветви процесса в приводе подвижных балок

Математическое описание восьмимассовой динамической модели позволяет получить скоростные параметры взаимодействия подвижных балок холодильника и охлаждаемого на нем металла. Данные скоростных параметров одного из вариантов взаимодействия подвижных балок и металла [12] взяты в качестве исходных для приведенного ниже примера расчета волновых процессов в приводе холодильника. Характер скоростного взаимодействия металла с подвижными балками холодильника показан на рис. 3, а.

При составлении алгоритма расчета волнового процесса при взаимодействии подвижных балок с металлом принято, что упругая волна от одного удара балок с металлом проходит вдоль привода подвижных балок в одну и другую стороны десять раз и после становится незначимой. При этом относительная скорость движения балок и металла v_{0i} непрерывно меняется, последующие удары следуют один за другим. Временной период между ударами значительно меньше периода прохождения упругой волны, что создает ситуацию, при которой происходит не только наложение прямой и обратной упругих волн от одного удара, но и включение в нагрузку всех последующих волн напряжений.

Результаты расчета давления, возникающего в гидроприводе от волн напряжений при взаимодействии охлаждаемого на холодильни-

ке металла с подвижными балками холодильника, показаны на рис. 3, б. Волновая составляющая нагрузки при статическом давлении в гидроприводе подвижных балок холодильника 16 МПа составляет порядка 15 МПа. Это давление в случайно выбранном варианте расчета составляет практически значение, равное статическому давлению. Данный пример свидетельствует о том, что в прочностных расчетах элементов привода холодильника необходимо вместе со статическими и динамическими составляющими нагрузки учитывать и нагрузку от волновых процессов.

Выводы. Предложен метод расчета волновых процессов, протекающих в гидроприводе холодильников машины непрерывного литья заготовок. Рассмотренный пример показал, что при том режиме работы гидропривода, который реализуется в холодильниках МНЛЗ, давление жидкости от волновых процессов близко по величине к статическому. А это значит, что волновой вид нагрузки на привод должен в обязательном порядке учитываться при расчете параметров элементов гидропривода. Для учета волновых процессов может быть использован предложенный в работе метод расчета волновой составляющей давления в гидроприводе балок холодильника металла машины непрерывного литья заготовок.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Савельев А.Н., Савельев Н.В. Анализ нагрузок во вкладыше универсального шпинделя привода прокатной клетки // Изв. вуз. Черная металлургия. 2007. № 10. С. 57 – 59.
2. Савельев А.Н., Савельев Н.В., Локтева Н.А. Визуальная оценка динамических процессов в шарнирах головок универсальных шпинделей // Изв. вуз. Черная металлургия. 2009. № 8. С. 59 – 64.
3. Савельев А.Н., Савельев А.Н. Исследование динамики движения полосы в установившейся стадии прокатки // Изв. вуз. Черная металлургия. 1982. № 10. С. 71 – 74.
4. Динамика машин и управление машинами: Справочник / В.К. Асташев, В.И. Бабитский и др.; под ред. Г.В. Крейнина. – М.: Машиностроение, 1988. – 240 с.
5. Болодин В.П. Волновая динамика машин. – М.: Наука, 1991. – 188 с.
6. Манжосов В.К. Модели продольного удара. – Ульяновск: изд. УлГТУ, 2006. – 160 с.
7. Комаров М.С. Динамика механизмов и машин. – М.: Машиностроение, 1969. – 296 с.
8. Савельев А.Н., Савельев Н.В. Экспериментальная оценка динамических нагрузок в зоне трения вкладышей универсального шпинделя прокатного стана // Изв. вуз. Черная металлургия. 2002. № 8. С. 51 – 53.
9. Савельев А.Н., Савельев Н.В., Локтева Н.А. Метод расчета давления в зоне контакта лопасть-вкладыш универсального шпинделя с учетом происходящих в ней волновых процессов // Изв. вуз. Черная металлургия. 2011. № 4. С. 50 – 55.
10. Расчет на прочность в машиностроении Т. III. Инерционные нагрузки. Колебания и ударные нагрузки. Выносливость. Усталость: справочник / Под ред. С.Д. Пономарева. – М.: Машгиз, 1959. – 1123 с.
11. Савельев А.Н., Козлов С.В., Анисимов Д.О. Особенности формирования динамических моделей многодвигательных гидроприводов холодильников МНЛЗ // Вестник СибГИУ. 2016. № 2 (16). С. 28 – 31.
12. Савельев А.Н., Козлов С.В., Винокуров Н.Е. Динамические нагрузки, воздействующие на элементы многодвигательного гидропривода холодильника МНЛЗ // Изв. вуз. Черная металлургия. 2018. Т. 61. № 2. С. 149 – 155.

© 2018 г. А.Н. Савельев, С.В. Козлов,
Э.Я. Живаго, О.Д. Прохоренко
Поступила 21 мая 2018 г.