

В.А. Панамарев

Сибирский государственный индустриальный университет

О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ОБЛАДАЮЩЕЙ ПОЛЗУЧЕСТЬЮ КРУГЛОЙ МЕМБРАНЫ В ПРОЦЕССЕ ТЕРМОФИКСАЦИИ

Термофиксацией называют нагрев и выдержку нагретого твердого тела в зажатом (фиксированном) состоянии, которое исключает возможность его деформирования. Известно, что термофиксация используется при правке тонких стержней и плоских мембран. Например, круглая мембрана с жестким контуром в процессе изготовления или эксплуатации может упруго искривиться и принять форму пологой оболочки вращения. Механическое выпрямление такой оболочки односторонними внешними усилиями приводит к ее прогибу в противоположную сторону с характерным звуковым эффектом типа хлопка, поэтому такие оболочки иногда называют «хлопунами». Это происходит за счет возникающих в мембране отрицательных напряжений, вызывающих потерю ее устойчивости. Поджатие мембраны внешними усилиями к плоской поверхности также создает в ней отрицательные напряжения и приводит к потере устойчивости после удаления внешних нагрузок.

Если же подвергнуть выпрямленную мембрану термофиксации, то возникшие в ней фиксированные деформации будут представлять собой в общем виде сумму деформаций упругости, пластичности, ползучести и температуры. В процессе термофиксации за счет температуры и длительности процесса происходит изменение напряженного состояния мембраны. Возникшие в ней необратимые (остаточные) деформации пластичности и ползучести могут привести к положительным деформациям мембраны после ее охлаждения до исходной температуры и, тем самым, придать ей устойчивое плоское натяжение на жесткий контур.

На практике такого рода правку часто подбирают опытным путем методом проб и ошибок. В настоящей работе исследуется изменение напряженного состояния круглой мембраны в процессе ее правки посредством термофиксации. Материал мембраны считается несжимаемым и обладающим ползучестью.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть в момент времени $t_0 = 0$ в результате осесимметричного нагружения при температуре T_0 полая оболочка вращения с жестким контуром, упруго деформируясь, превратилась в плоскую мембрану. При этом в мембране возникло поле отрицательных (сжимающих) напряжений: радиального $\sigma_1(t_0; T_0) = \sigma_1^*$ и окружного $\sigma_2(t_0; T_0) = \sigma_2^*$, являющимися функциями радиуса пластины r . Напряжение по высоте мембраны σ_3 в силу малости ее толщины полагается равным нулю. При этом напряженное состояние мембраны становится плоским. Возникшие при этом радиальные и окружные логарифмические деформации мембраны обозначим соответственно $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^*$ и $\varepsilon_2 = \varepsilon_2^*$. Условие несжимаемости материала для логарифмических деформаций имеет вид $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$. Следовательно, деформация по толщине определяется по выражению $\varepsilon_3 = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$. Рассматриваемое далее напряженно-деформированное состояние мембраны будем соотносить с конкретными значениями ее радиуса r .

Зафиксируем деформации ε_1^* , ε_2^* и нагреем мембрану до температуры $T > T_0$. В этом случае исходные деформации мембраны, оставаясь зафиксированными отрицательными величинами ε_1^* , ε_2^* , останутся неизменными по величине, но будут состоять в общем случае уже из упругих, пластических и температурных составляющих:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1^* &= \varepsilon_1^e + \varepsilon_1^p + \varepsilon^T; \\ \varepsilon_2^* &= \varepsilon_2^e + \varepsilon_2^p + \varepsilon^T.\end{aligned}\quad (1)$$

Температурная логарифмическая деформация определится выражением

$$\varepsilon^T = \ln[1 + \alpha(T - T_0)], \quad (2)$$

где α – коэффициент температурного расширения материала мембраны.

Упругие деформации несжимаемого материала согласно закону Гука [1] удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}\varepsilon_1^e &= \frac{1}{E}(\sigma_1 - 0,5\sigma_2); \\ \varepsilon_2^e &= \frac{1}{E}(\sigma_2 - 0,5\sigma_1),\end{aligned}\quad (3)$$

где E – зависящий от температуры модуль Юнга.

Коэффициент Пуассона ν равен 0,5. Пластические деформации свяжем степенным законом деформационной теории Девиса–Надаи [2]

$$\varepsilon_1^p = A\sigma_i^{m-1}(\sigma_1 - 0,5\sigma_2); \quad (4)$$

$$\varepsilon_2^p = A\sigma_i^{m-1}(\sigma_2 - 0,5\sigma_1);$$

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}, \quad (5)$$

где σ_i – интенсивность напряжений; m и A – зависящие от температуры пластические характеристики материала мембраны.

Из соотношений (2) – (5) следуют выражения для определения напряжений в момент выпрямления и нагрева мембраны в каждой точке радиуса r :

$$\sigma_1 = \frac{2E(2\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2)}{3(1 + AE\sigma_i^{m-1})}; \quad (6)$$

$$\sigma_2 = \frac{2E(2\bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon}_1)}{3(1 + AE\sigma_i^{m-1})};$$

$$\frac{E}{\sigma_i} + A\sigma_i^m = \bar{\varepsilon}_i, \quad (7)$$

где использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_1 &\equiv \varepsilon_1^* - \varepsilon^T; \\ \bar{\varepsilon}_2 &\equiv \varepsilon_2^* - \varepsilon^T; \\ \bar{\varepsilon}_i &\equiv \sqrt{\frac{4}{3}(\bar{\varepsilon}_1^2 + \bar{\varepsilon}_2^2 + \bar{\varepsilon}_1\bar{\varepsilon}_2)}.\end{aligned}\quad (8)$$

После численного решения нелинейного алгебраического уравнения (7) можно определить поле напряжений в момент начала термофиксации из выражений (6). Поля напряжений обозначим $\sigma_1 \equiv \sigma_1(0;T)$ и $\sigma_2 \equiv \sigma_2(0;T)$; эти напряжения будут отрицательными, поскольку отрицательными являются определяющие их величины $\bar{\varepsilon}_1$ и $\bar{\varepsilon}_2$.

Со временем термофиксации (при $t > 0$) исходные деформации ε_1^* , ε_2^* останутся неизменными по величине, но будут состоять в общем случае уже из упругих, пластических, температурных и развивающихся во времени деформаций ползучести ε_1^c , ε_2^c соответственно:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1^* &= \varepsilon_1^e(t;T) + \varepsilon_1^p(t;T) + \varepsilon^T + \varepsilon_1^c(t;T); \\ \varepsilon_2^* &= \varepsilon_2^e(t;T) + \varepsilon_2^p(t;T) + \varepsilon^T + \varepsilon_2^c(t;T).\end{aligned}\quad (9)$$

Дифференцируя эти равенства по времени, получим соотношения скорости упругих деформаций и деформаций ползучести

$$0 = \dot{\varepsilon}_1^e + \dot{\varepsilon}_1^c; \quad 0 = \dot{\varepsilon}_2^e + \dot{\varepsilon}_2^c. \quad (10)$$

Поскольку $\dot{\varepsilon}_1^* = \dot{\varepsilon}_2^* = 0$ по условиям термофиксации, $\dot{\varepsilon}_1^p = \dot{\varepsilon}_2^p = 0$ в силу отсутствия активного этапа нагружения оболочки, $\dot{\varepsilon}^T = 0$ в силу неизменной разности температур $\Delta = T - T_0$ (точкой здесь и далее обозначены производные по времени).

Используем закон установившейся ползучести в степенной форме [3]

$$\begin{aligned}\varepsilon_1^c &= B\sigma_i^{n-1}(\sigma_1 - 0,5\sigma_2); \\ \varepsilon_2^c &= B\sigma_i^{n-1}(\sigma_2 - 0,5\sigma_1),\end{aligned}\quad (11)$$

где n и B – зависящие от температуры характеристики ползучести материала мембраны.

Интенсивность напряжений определяется соотношением (5); получаем связи скоростей деформаций ползучести с напряжениями. Дифференцируя закон Гука (3) по времени, свяжем скорости упругих деформаций со скоростями изменения напряжений

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1^e &= \frac{1}{E}(\dot{\sigma}_1 - 0,5\dot{\sigma}_2); \\ \dot{\varepsilon}_2^e &= \frac{1}{E}(\dot{\sigma}_2 - 0,5\dot{\sigma}_1).\end{aligned}\quad (12)$$

Из соотношений (10) – (12) получаем систему дифференциальных уравнений для напряжений как функций времени t при заданной температуре T : $\sigma_1(t;T)$ и $\sigma_2(t;T)$:

$$\begin{aligned}(\dot{\sigma}_1 - 0,5\dot{\sigma}_2) + EB\sigma_i^{n-1}(\sigma_1 - 0,5\sigma_2) &= 0; \\ (\dot{\sigma}_2 - 0,5\dot{\sigma}_1) + EB\sigma_i^{n-1}(\sigma_2 - 0,5\sigma_1) &= 0.\end{aligned}\quad (13)$$

Начальные условия этой системы ($\sigma_1(0;T)$ и $\sigma_2(0;T)$) являются решениями системы уравне-

ний (6), (7). Система (13) с указанными начальными условиями допускает решение в аналитическом виде

$$\begin{aligned}\sigma_1(t;T) &= \frac{\sigma_1(0;T)}{\{1+t(n-1)BE[\sigma_i(0;T)^{n-1}]\}^{\frac{1}{n-1}}} \\ \sigma_2(t;T) &= \frac{\sigma_2(0;T)}{\{1+t(n-1)BE[\sigma_i(0;T)^{n-1}]\}^{\frac{1}{n-1}}}, \\ \sigma_i(0;T) &= \sqrt{\sigma_1^2(0;T) + \sigma_2^2(0;T) - \sigma_1(0;T)\sigma_2(0;T)}. \quad (14)\end{aligned}$$

Зная напряжения в любой момент термофиксации, можно определить соответствующие им упругие составляющие деформации мембраны по закону Гука (3). Когда обратимые упругие и температурные деформации известны, можно определить необратимые (остаточные) деформации мембраны ε_1^0 и ε_2^0 , состоящие из деформаций пластичности и деформаций ползучести [1]: $\varepsilon_1^0 = \varepsilon_1^p + \varepsilon_1^c$ и $\varepsilon_2^0 = \varepsilon_2^p + \varepsilon_2^c$. Эти остаточные деформации можно выразить как разность фиксированных деформаций и их обратимых составляющих:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1^0(t;T) &= \varepsilon_1^* - (\varepsilon^T + \varepsilon^e) = \varepsilon_1^* - \ln[1 + \\ &+ \alpha(T - T_0)] - \frac{1}{E}[\sigma_1(t;T) - 0,5\sigma_2(t;T)]; \\ \varepsilon_2^0(t;T) &= \varepsilon_2^* - (\varepsilon^T + \varepsilon^e) = \varepsilon_2^* - \ln[1 + \\ &+ \alpha(T - T_0)] - \frac{1}{E}[\sigma_2(t;T) - 0,5\sigma_1(t;T)]. \quad (15)\end{aligned}$$

Если в момент времени $t = t_1$ охладить нагруженную мембрану до исходной температуры T_0 , то полностью исчезнут ее температурные деформации: $\varepsilon^T = 0$. При этом фиксированные деформации мембраны ε_1^* и ε_2^* можно будет представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1^* &= \varepsilon_1^0(t_1;T) + \varepsilon_1^p(t_1;T_0) + \varepsilon_1^e(t_1;T_0); \\ \varepsilon_2^* &= \varepsilon_2^0(t_1;T) + \varepsilon_2^p(t_1;T_0) + \varepsilon_2^e(t_1;T_0). \quad (16)\end{aligned}$$

Используя соотношения упругости и пластичности (3) – (5), выражения (16) можно представить в следующем виде:

$$\varepsilon_1^* = \varepsilon_1^0 + \left[\frac{1}{E} + A\sigma_i^{m-1}(t_1;T_0) \right] [\sigma_1(t_1;T_0) - 0,5\sigma_2(t_1;T_0)];$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_2^* &= \varepsilon_2^0 + \left[\frac{1}{E} + A\sigma_i^{m-1}(t_1;T_0) \right] [\sigma_2(t_1;T_0) - 0,5\sigma_1(t_1;T_0)]; \quad (17) \\ \sigma_i(t_1;T_0) &= \sqrt{\sigma_1^2(t_1;T_0) + \sigma_2^2(t_1;T_0) - \sigma_1(t_1;T_0)\sigma_2(t_1;T_0)}.\end{aligned}$$

Из этих соотношений можно выразить напряжения, возникшие в мембране после ее термофиксации и охлаждения до исходной температуры T_0 в произвольной точке радиуса мембраны r

$$\sigma_1(t_1;T_0) = \frac{2E(2\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2)}{3[1 + AE\sigma_i^{m-1}(t_1;T_0)]}; \quad (18)$$

$$\sigma_2(t_1;T_0) = \frac{2E(2\bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon}_1)}{3[1 + AE\sigma_i^{m-1}(t_1;T_0)]};$$

$$\frac{E}{\sigma_i(t_1;T_0)} + A\sigma_i^m(t_1;T_0) = \bar{\varepsilon}_i, \quad (19)$$

где $\bar{\varepsilon}_1 \equiv \varepsilon_1^* - \varepsilon_1^0$; $\bar{\varepsilon}_2 \equiv \varepsilon_2^* - \varepsilon_2^0$;

$$\bar{\varepsilon}_i \equiv \sqrt{\frac{4}{3}(\bar{\varepsilon}_1^2 + \bar{\varepsilon}_2^2 + \bar{\varepsilon}_1\bar{\varepsilon}_2)}.$$

После определения интенсивности напряжений мембраны $\sigma_i(t_1;T_0)$ из нелинейного алгебраического уравнения (19) можно из выражений (18) определить поля напряжений в момент окончания термофиксации и последующего охлаждения, которые обозначим $\bar{\sigma}_1 \equiv \sigma_1(t_1;T_0)$ и $\bar{\sigma}_2 \equiv \sigma_2(t_1;T_0)$. Эти напряжения, являющиеся функциями радиуса мембраны r , могут быть и положительными, и отрицательными, и нулевыми в зависимости от значений величин $\bar{\varepsilon}_1 \equiv \varepsilon_1^* - \varepsilon_1^0$ и $\bar{\varepsilon}_2 \equiv \varepsilon_2^* - \varepsilon_2^0$.

Естественная цель правки заключается в получении неотрицательного поля напряжений $\bar{\sigma}_1 \equiv \sigma_1(t_1;T_0)$, $\bar{\sigma}_2 \equiv \sigma_2(t_1;T_0)$ в выпрямленной мембране после ее термофиксации и охлаждения. Нулевое поле напряжений создаст устойчивое положение плоской мембраны, а положительное поле напряжений натянет мембрану на ее жесткий контур. Результаты термофиксации зависят не только от значений используемых температур и длительности процесса, но и от величины изначальных отрицательных напряжений σ_1^* и σ_2^* , определяемых тем или иным способом выпрямления изогнутой мембраны. Зная заранее исходные величины σ_1^* и σ_2^* , T_0 и T при $t_0 = 0$ можно определить длительность термофиксации t_1 для осуществления рассматриваемой правки.

Выводы. Практический метод проб и ошибок по определению длительности термофик-

сации заменяется математическим моделированием этого процесса.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. – 744 с.
2. Бурлаков А.В., Львов Г.И., Марачковский О.К. Ползучесть тонких оболочек. – Харьков: Вища школа, 1977. – 123 с.

3. Горев Б.В., Клопотов И.Д., Раевская Г.А., Соснин О.В. К вопросу обработки металлов давлением в режиме ползучести // ПМТФ. 1980. № 5. С. 185 – 191.

© 2018 г. В.А. Панамарев
Поступила 04 апреля 2018 г.