

Оригинальная статья

УДК 621.7:669.1:669.2

DOI: 10.57070/2304-4497-2023-2(44)-20-27

КРИТЕРИЙ КОРОБЛЕНИЯ ПРИ ТЕРМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ СИММЕТРИЧНЫХ ИЗДЕЛИЙ

© 2023 г. Д. Е. Капуткин

Московский государственный технический университет гражданской авиации (Россия, 125493, Москва, Кронштадтский бульвар, 20)

Аннотация. В процессе термической обработки изменение температуры всегда происходит неравномерно по объему изделия. При этом возникают термические (в более холодных зонах – растягивающие, а в более нагретых – сжимающие) и фазовые напряжения. Теория термической обработки материалов утверждает, что при симметричном нагреве или охлаждении однородных изделий простой формы термические напряжения оказываются распределенными симметрично, изгибающий момент равен нулю, изменения формы (коробление, поводки) возникать не должны. При определенных условиях коробление возможно при симметричном нагревании или охлаждении однородного симметричного объекта. Во время изменения температуры внутри изделия возникают области с макронапряжениями растяжения и сжатия. Возникающие нормальные напряжения создают две скомпенсированные силы (растяжения и сжатия). Как известно из теории сопротивления материалов, если сжимающая сила превышает критическую, то даже при симметричном распределении напряжений происходит потеря устойчивости сжатия (коробление объекта). Следовательно, получаем безразмерный критерий, при превышении критического значения которого (для пластины – 2,6, для стержня – 2,2) появляется опасность неконтролируемого изменения формы (коробления) даже при абсолютно симметричном нагреве или охлаждении в ходе термической обработки. Эксперимент подтвердил проведенные теоретические оценки. Опасность такого коробления следует учитывать при назначении режимов термической обработки симметричных изделий (листов, полос, дисков, стержней).

Ключевые слова: коробление, поводки, термическая обработка, термические напряжения, распределение напряжений, нагрев, охлаждение, критерий коробления

Для цитирования: Капуткин Д.Е. Критерий коробления при термической обработке симметричных изделий // Вестник Сибирского государственного индустриального университета. 2023. № 2 (44). С. 20–27. [http://doi.org/10.57070/2304-4497-2023-2\(44\)-20-27](http://doi.org/10.57070/2304-4497-2023-2(44)-20-27)

Original article

CRITERION OF WARPING DURING THE HEAT TREATMENT OF SYMMETRIC PRODUCTS

© 2023 D. E. Kaputkin

Moscow State Technical University of Civil Aviation (20 Kronstadtsky Boulevard, Moscow, 125493, Russian Federation)

Abstract. During the heat treatment process, the temperature change always occurs unevenly over the volume of the product. At the same time, thermal (stretching in colder zones, and compressive in more heated ones) and phase stresses arise. The theory of heat treatment of materials states that with symmetrical heating or cooling of homogeneous products of simple shape, thermal stresses are distributed symmetrically, the bending moment is zero, shape changes (warping, leashes) should not occur. Under certain conditions, warping is possible with symmetrical heating or cooling of a homogeneous symmetrical object. During temperature changes inside the product, areas with macro stresses of stretching and compression arise. The resulting normal stresses create two compensated forces (stretching and compression). As is known

from the theory of resistance of materials, if the compressive force exceeds the critical one, then even with a symmetrical distribution of stresses, there is a loss of compression stability (warping of the object). Consequently, we obtain a dimensionless criterion, if the critical value of which is exceeded (for the plate – 2.6, for the rod – 2.2), there is a danger of uncontrolled shape change (warping) even with absolutely symmetrical heating or cooling during heat treatment. The experiment confirmed the theoretical estimates. The danger of such warping should be taken into account when assigning heat treatment modes for symmetrical products (sheets, strips, disks, rods).

Keywords: warping, heat treatment, thermal stresses, stress distribution, heating, cooling, warping criterion

For citation: Kaputkin D.E. Criterion of warping during the heat treatment of symmetric products. *Bulletin of the Siberian State Industrial University*. 2023, no. 2 (44), pp. 20–27. (In Russ.). [http://doi.org/10.57070/2304-4497-2023-2\(44\)-20-27](http://doi.org/10.57070/2304-4497-2023-2(44)-20-27)

Введение

В процессе термической обработки (объемной [1] или поверхностной [2 – 5]) изменение температуры всегда происходит неравномерно по объему изделия [6]. При этом возникают термические [7] и фазовые [8, 9] напряжения. Эти напряжения могут вызывать изменения структуры, появление внутренних и поверхностных трещин [10, 11], коробление изделия (неконтролируемое изменение формы) [12, 13]. Поскольку в однородном материале чем выше температура, тем больше удельный объем, то в более холодных зонах возникают напряжения растяжения, а в более нагретых – сжатия. При достаточно медленном нагреве или охлаждении эти напряжения могут релаксировать непосредственно в процессе изменения температуры [14] и не вызывать коробления. Допустимые скорости определяются как условиями теплопередачи (начальной и конечной температурами [15], температуропроводностью материала [16, 17], размерами и формой объекта [18], способом теплопередачи), так и симметричностью теплопередачи. Если же по каким-либо причинам скорость изменения температуры оказывается недостаточно мала, чтобы обеспечить релаксацию возникающих напряжений, то опасность коробления становится реальной. Теория термической обработки материалов требует проведения нагрева или охлаждения однородных изделий простой формы (пластин или стержней) симметрично, то есть так, чтобы температуры на обеих поверхностях пластины или по всей окружности круглого стержня были одинаковыми. В этом случае напряжения оказываются распределенными симметрично относительно центральной плоскости пластины или оси стержня и изгибающий момент равен нулю. В этом случае неконтролируемые изменения формы (коробление или поводки) возникать не должны [19]. Если же коробление все-таки имеет место, то его причиной является несимметричность свойств материала [20, 21] или несоблюдение условия об отсутствии вариаций температуры по пространству печи при нагреве или охлаждающей среды при охлаждении [22], а также протекание иных процессов, сопро-

вождающихся несимметричным изменением удельного объема материала [23].

Расчеты и обсуждение

Представляется, что при определенных условиях коробление возможно и при симметричном нагревании или охлаждении однородного симметричного объекта. Рассмотрим распределение температур внутри объекта относительно простой формы: плоской пластины толщиной D_p , шириной $B_p \gg D_p$ и длиной $L_p > B_p$ или цилиндрического стержня диаметром D_r и длиной $L_r \gg D_r$ при симметричном нагревании или охлаждении и отсутствии фазовых превращений. Такую задачу можно считать одномерной, то есть распределение температур неоднородно только по одной координате.

Процессы изменения температуры при теплопередаче описываются дифференциальным уравнением теплопроводности (уравнение диффузии) [24]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad (1)$$

где T – температура в точке с координатой z ; t – время; a – коэффициент температуропроводности материала.

В самом жестком случае до начала отсчета времени по всей толщине объекта поддерживается исходная температура T_i , а при $t = 0$ температура на поверхности становится равной конечной T_f , то есть температуре окружающей среды, и затем не меняется. Если для пластины ввести следующие обозначения: $\theta = \frac{T - T_f}{T_i - T_f}$ –

приведенная температура; $\tau = \frac{at}{D_p^2}$ – приведен-

ное время; $\chi = \frac{z}{D_p}$ – приведенная координата;

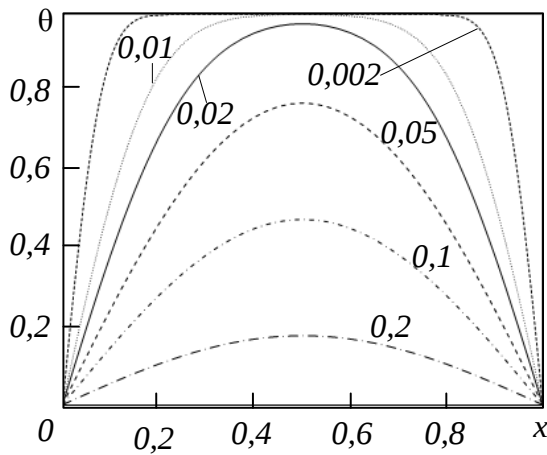


Рис. 1. Распределение приведенных температур внутри однородной пластины в зависимости от приведенной координаты при различном приведенном времени от начала термической обработки

Fig. 1. Distribution of reduced temperatures inside a homogeneous plate depending on the reduced coordinate at different reduced time from the start of heat treatment

z – расстояние от одного из краев пластины (все приведенные параметры безразмерные), то решением уравнения теплопроводности при указанных начальных и граничных условиях: $\theta(t=0, x \in (0,1)) = 1$,

$\theta(t > 0, x=0) = \theta(t > 0, x=1) = 0$, будет ряд:

$$\theta = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2n+1} \exp[-(2n+1)^2 \pi^2 \tau] \sin[(2n+1)\pi x] \right\}. \quad (2)$$

Распределение приведенных температур внутри пластины при разном приведенном времени показано на рис. 1.

Введя обозначения для стержня: $\tau = \frac{at}{D_r^2}$ –

приведенное время; $r = \frac{2z}{D_r}$ – приведенная ко-

ордината; z – расстояние от центра стержня (все приведенные параметры безразмерные), то решением уравнения теплопроводности при начальных и граничных условиях $\theta(t=0, x \in (-1,1)) = 1$,

$\theta(t > 0, x=-1) = \theta(t > 0, x=1) = 0$, будет ряд:

$$\theta = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \exp(-\alpha_n^2 \tau) \frac{J_0(r \alpha_n)}{\alpha_n J_1(\alpha_n)} \right\}, \quad (3)$$

где J_0 и J_1 – функция Бесселя нулевого или первого порядка; α_n – корни уравнения $J_0(\alpha_n) = 0$ [24].

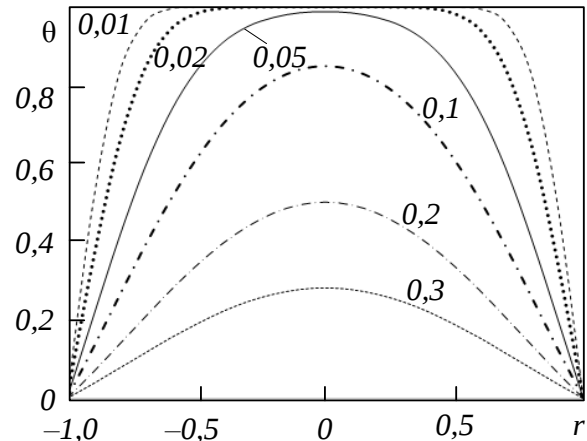


Рис. 2. Распределение приведенных температур внутри стержня в зависимости от приведенной координаты при различном приведенном времени от начала термической обработки

Fig. 2. Distribution of reduced temperatures inside a rod depending on the reduced coordinate at different reduced time from the start of heat treatment

Распределение приведенных температур внутри стержня при разном приведенном времени показано на рис. 2. Взаимодействие слоев материала с разной температурой приводит к тому, что во внешних зонах нагреваемого объекта появляются напряжения сжатия, а во внутренних – растяжения. Для охлаждаемого объекта картина обратная. В каждой точке объекта возникающие термические напряжения определяются отличием локальной температуры от средней по всему объему в рассматриваемый момент времени. Нормальные термические напряжения определяем по формуле [25]:

$$\sigma = E\alpha(T - T_a) = E\alpha(\theta - \theta_a)(T_i - T_f), \quad (4)$$

где E – модуль Юнга вещества; T и θ – действительная и приведенная температуры в рассматриваемой точке; T_a и θ_a – средняя действительная и средняя приведенная температуры в объекте; α – линейный коэффициент термического расширения.

Можно обратить внимание, что $\alpha(T_i - T_f) = \delta$ – общему относительному изменению длины (дилатометрическому эффекту), вызванному разностью максимальной и минимальной температур, наблюдаемых в процессе термической обработки объекта. То есть в каждой точке $\sigma = E\delta(\theta - \theta_a)$.

Зависимость средней приведенной температуры от приведенного времени с начала процесса термической обработки представлена на рис. 3.

Возникающие нормальные напряжения создают две скомпенсированные силы (растяжения F_s и сжатия F_c). Модули этих сил равны,

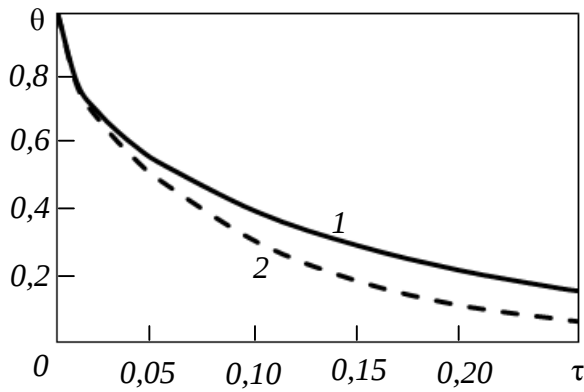


Рис. 3. Зависимость средней приведенной температуры θ_a пластины (1) или стержня (2) от приведенного времени с начала процесса термической обработки τ
Fig. 3. Dependence of the average reduced temperature θ_a of the plate (1) or rod (2) on the reduced time from the beginning of the heat treatment process τ

поэтому для расчета каждой из них в пластине можно воспользоваться соотношением

$$\begin{aligned} F_c &= F_s = \frac{1}{2} B_p \int_0^{D_p} |\sigma| dz = \\ &= \frac{1}{2} E \delta B_p D_p \int_0^1 |\theta - \theta_a| dx, \end{aligned} \quad (5)$$

а в стержне

$$\begin{aligned} F_c &= F_s = \frac{1}{2} \int_0^{D_r/2} |\sigma| 2\pi z dz = \\ &= \frac{1}{2} E \delta \pi \frac{D_r^2}{4} \int_0^1 |\theta - \theta_a| r dr. \end{aligned} \quad (6)$$

Введем обозначение

$$\varphi = \frac{F}{E \delta S}, \quad (7)$$

где φ – приведенная сила сжатия; S – площадь сечения пластины или стержня.

Получим соотношения для пластины

$$\varphi = \frac{1}{2} \int_0^1 |\theta - \theta_a| dx, \quad (8)$$

а для стержня

$$\varphi = \frac{1}{2} \int_0^1 |\theta - \theta_a| r dr. \quad (9)$$

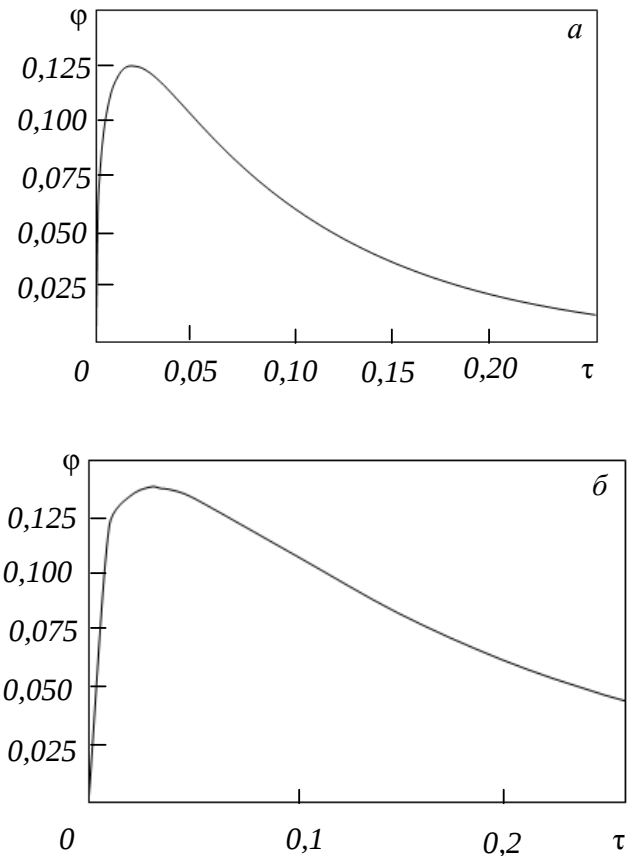


Рис. 4. Зависимость средней приведенной силы φ от приведенного времени с начала процесса термической обработки τ для пластины (а) и стержня (б)
Fig. 4. Dependence of the average reduced force φ on the reduced time from the beginning of the heat treatment process τ for the plate (a) and the rod (б)

Зависимость приведенной силы от приведенного времени (рис. 4) показывает, что ее максимум A , примерно равный 0,125 для пластины и 0,138 для стержня, достигается при $\tau \approx 0,02$. Следовательно, максимальная сила сжатия

$$F_c \approx A E \delta S. \quad (10)$$

Как известно из теории сопротивления материалов, сжимающая сила даже при симметричном распределении напряжений может вызывать потерю устойчивости сжатия (коробление объекта). Критическая величина силы сжатия, при превышении которой исчезает прямолинейность объекта [26], определяем по формуле

$$F_{crit} = \frac{\pi^2 E J}{(\mu L)^2}, \quad (11)$$

где E – модуль Юнга материала; J – момент инерции сечения объекта (для пластины

$J_p = \frac{B_p D_p^3}{12}$, для стержня $J_r = \frac{\pi D_r^4}{64}$; L – длина объекта; μ – коэффициент приведения длины, при свободных концах объекта или закреплении объекта в одной точке $\mu = 2$, для закрепленных концов $\mu = 1$, при наличии еще и k мест закрепления вдоль длины объекта $\mu = k + 1$.

Из уравнений (7), (8) получаем критерий, при превышении которого величина F_c превосходит значение F_{crit} и появляется опасность неконтролируемого изменения формы (коробления) даже при абсолютно симметричном нагреве или охлаждении в ходе термической обработки:

– для пластины

$$\frac{L_p}{D_p} > \frac{2,6}{\mu\sqrt{\delta}} = \frac{1,3}{\sqrt{\alpha VT}};$$

– для стержня

$$\frac{L_p}{D_p} > \frac{2,2}{\mu\sqrt{\delta}} = \frac{1,1}{\sqrt{\alpha VT}},$$

где α – линейный коэффициент термического расширения материала; ΔT – разность максимальной и минимальной температур внутри термообрабатываемого объекта.

Если указанный критерий для рассматриваемого вида обработки выше критического, то даже при полностью симметричном поддержании температуры материала коробление объекта будет возможным. Например, для стали $\alpha = (15 \pm 5) \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ и коробление будет иметь место, когда разность температур в центре и на поверхности пластины составляет 400 К и отношение длины пластины к ее толщине превышает 20 ± 5 .

Важно отметить, что указанное неконтролируемое изменение формы объекта оценено в предположении об упругом поведении материала. Поэтому в процессе выравнивания температуры возможно восстановление формы объекта.

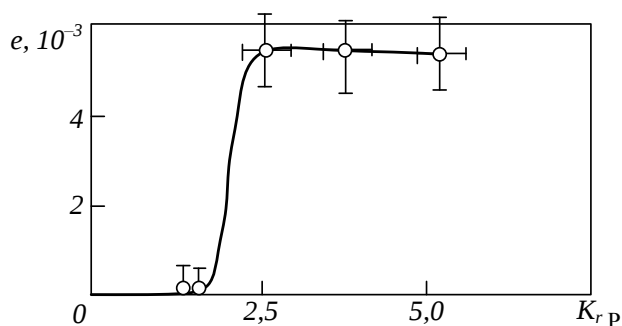


Рис. 5. Экспериментальная зависимость относительного прогиба стержня e от величины Kr

Fig. 5. Experimental dependence of the relative deflection of the rod e on the value Kr

Сохранение коробления более вероятно в случае нагрева, чем при охлаждении, так как с ростом температуры предел текучести понижается и исходно упругая деформация изгиба, возникающая при рассмотренной потере устойчивости, становится пластической.

Эксперимент

Для экспериментальной проверки полученных результатов было исследовано коробление стержней из стали марки 40 длиной 35 – 130 и диаметром 2 мм. Образцы были медленно нагреты до температуры 900 К после чего быстро охлаждены в вертикальном положении вертикальным потоком воздуха комнатной температуры. Замеряли прогиб в центре стержня после охлаждения до комнатной температуры с точностью 0,05 мм. До нагрева прогиб не превышал 0,05 мм. Считая, что максимальная разность температур на поверхности и центре стержня достигала 500 К, получили, что когда K_r меньше критического для возможного коробления, то значимого искривления стержня не выявляется, а при превышении расчетного значения искривление стержня становится значимым (рис. 5, здесь $K_r = \sqrt{\delta} \cdot \mu \cdot L_r / D_r$).

Выводы

На основании анализа расчетного распределения напряжений в симметрично нагреваемых или охлаждаемых плоских объектах предложен безразмерный критерий потери устойчивости формы (коробления) в ходе термической обработки. Опасность такого коробления следует учитывать при назначении режимов термической обработки симметричных изделий (дисков для пил, полос, листов, стержней).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Новиков И.И., Строганов Г.Б., Новиков А.И. Металловедение, термообработка и рентгенография. Москва: МИСиС, 1994. 480 с.
- Liu Z., Xie Y., Ye X., Wang J., Liu, B. Numerical and experimental study of electromagnetic induction heating process for bolted flange joints // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C // *Journal of Mechanical Engineering Science*. 2021. Vol. 235. No. 22. P. 6357–6369. <https://doi.org/10.1177/09544062211007162>
- Капуткин Д.Е., Дураджи В.Н., Капуткина Н.А. Ускоренное диффузионное насыщение поверхности металлов при электро-химико-термической обработке // *Физика и химия обработки материалов*. 2020. № 2. С. 48–57.

4. Safronov I.S., Neplueva A.A., Ushakov I.V. Mechanical Properties of Laser Treated Thin Sample of an Amorphous-Nanocrystalline Metallic Alloy Depending on the Initial Annealing Temperature // *Defect and Diffusion Forum*. 2021. Vol. 410. P. 489–494. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/DDF.410.489>
5. Safronov I.S., Ushakov I.V., Minaev V.I. Influence of environment at laser processing on microhardness of amorphous-nanocrystalline metal alloy // *Materials Science Forum*. 2022. Vol. 1052. P. 50–55. <https://doi.org/10.4028/p-wjsns4>
6. Naterer G. F. Advanced heat transfer. CRC Press. 2021. 555 p. <https://doi.org/10.1201/9781003206125>
7. Boley B.A., Weiner J.H. Theory of Thermal Stresses. Dover Publications. 2012. 820 p.
8. Kaputkina L.M., Kaputkin D.E. Structure and phase transformations under quenching and tempering during heat and thermomechanical treatment of steels // *Materials Science Forum*. 2003. Vol. 426–432. P. 1119–1126. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.426-432.1119>
9. Kaputkin D.E., Kaputkina L.M., Prokoshkin S.D. Transformation of retained austenite during tempering of high carbon steel // *Journal de Physique IV*. 2003. Vol. 112. P. 275–278. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.426-432.1119>
10. Казяев М.Д., Самойлович Ю.А., Палеев В.С. Математическое моделирование напряжённого состояния в рабочих валках холодной прокатки при ускоренном нагреве в камерной печи // *Известия вузов. Черная металлургия*. 2015. Т. 58. № 9. С. 696 – 702. <https://doi.org/10.17073/0368-0797-2015-9-696-702>
11. Yang J.-A., Shen H.-F. Internal shrinkage crack in a 10 T water-cooled steel ingot with a large height-to-diameter ratio // *China Foundry*. 2021. Vol. 18. No. 2. P. 110–117. <https://doi.org/10.1007/s41230-021-0141-8>
12. Liu F., Deng L., Zhou H. Residual Stress and Warpage Simulation. In: *Computer Modeling for Injection Molding*. 2013. P. 157–193. <https://doi.org/10.1002/9781118444887.ch6>
13. Chang R.Y., Tsaur B.D. Experimental and theoretical studies of shrinkage, warpage, and sink marks of crystalline polymer injection molded parts // *Polymer Engineering and Science*. 1995. Vol. 35. No. 15. P. 1222–1230. <https://doi.org/10.1002/pen.760351505>
14. Борздыка А.М., Гецов Л.Б. Релаксация напряжений в металлах и сплавах. Москва: Металлургия, 1972. 304 с.
15. Mirković N., Brajović L., Popović Z., Todorović G., Lazarević L., Petrović M. Determination of the temperature stresses in CWR based on measured rail surface temperatures // *Construction and Building Materials*. 2021. Vol. 284. P. 122713. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2021.122713>
16. Gaikwad K.R., Khavale S.G. Fractional order transient thermoelastic stress analysis of a thin circular sector disc // *International Journal of Applied Thermodynamics*. 2022. Vol. 25. No. 1. P. 1–8. <https://doi.org/10.5541/ijot.820828>
17. Kim Chai Hwan. Determination of Calibration Constants on Measurement of the Residual Stress for Polymeric Molded Parts // *Fibers and Polymers*. 2022. Vol. 23. No. 4. P. 878–881. <https://doi.org/10.1007/s12221-022-4571-8>
18. Mungle N. Thermal modelling of thin triangular plate // *JP Journal of Heat and Mass Transfer*. 2021. Vol. 23. No. 1. P. 113–125. <https://doi.org/10.17654/HM023010113>
19. Лахтин Ю.М., Леонтьева В.П. Материаловедение. Москва: Машиностроение. 1990. 528 с.
20. Биткина О.В. Экспериментальное исследование влияния технологических факторов на формоизменение многослойных панелей из композиционных материалов // *Вестник Самарского Государственного Технического Университета. Серия: Технические науки*. 2013. № 1 (37). С. 99–110.
21. Li Q., Hou P., Shang S., Xu D. Three-dimensional thermal-stress analysis of transversely isotropic double-layer plate based on Green's functions // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2022. Vol. 227. P. 107431. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2022.107431>
22. Зверьев Е. М. Температурная деформация длинной упругой полосы // *Вестник Российского Университета Дружбы Народов. Серия: Инженерные исследования*. 2021. Т. 22. № 3. С. 293–304.
23. Cui T., Xiao G., Yan H., Zhang Y., Wang J.-Q. Numerical simulation and analysis of the thermal stresses of a planar solid oxide electrolysis cell // *International Journal of Green Energy*. 2022. P. 1–13. <https://doi.org/10.1080/15435075.2022.2065881>
24. Бокштейн Б.С. Диффузия в металлах. Москва: Металлургия, 1978. 248 с.

25. Бернштейн М.Л., Займовский В.А. Механические свойства металлов. Москва: Металлургия, 1979. 496 с.
26. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. 592 с.

REFERENCES

1. Novikov I.I., Stroganov G.B., Novikov A.I. *Metallurgy, heat treatment and radiography*. Moscow: MISiS, 1994. 480 p. (In Russ.).
2. Liu Z., Xie Y., Ye X., Wang J., Liu, B. Numerical and experimental study of electromagnetic induction heating process for bolted flange joints. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C. Journal of Mechanical Engineering Science*. 2021, vol. 235, no. 22. pp. 6357–6369. <https://doi.org/10.1177/09544062211007162>
3. Kaputkin D.E., Duraji V.N., Kaputkina N.A. Accelerated diffusion saturation of the surface of metals during electro-chemical-heat treatment. *Fizika i himiya obrabotki materialov*. 2020, no. 2, pp. 48–57. (In Russ.).
4. Safronov I.S., Neplueva A.A., Ushakov I.V. Mechanical Properties of Laser Treated Thin Sample of an Amorphous-Nanocrystalline Metallic Alloy Depending on the Initial Annealing Temperature. *Defect and Diffusion Forum*. 2021, vol. 410, pp. 489–494. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/DDF.410.489>
5. Safronov I.S., Ushakov I.V., Minaev V.I. Influence of environment at laser processing on microhardness of amorphous-nanocrystalline metal alloy. *Materials Science Forum*. 2022, vol. 1052, pp. 50–55. <https://doi.org/10.4028/p-wjsns4>
6. Naterer G.F. Advanced heat transfer. *CRC Press*. 2021, pp. 555. <https://doi.org/10.1201/9781003206125>
7. Boley B.A., Weiner J.H. *Theory of Thermal Stresses*. Dover Publications. 2012, pp. 820.
8. Kaputkina L.M., Kaputkin D.E. Structure and phase transformations under quenching and tempering during heat and thermomechanical treatment of steels. *Materials Science Forum*. 2003, vol. 426–432, pp. 1119–1126. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.426-432.1119>
9. Kaputkin D.E., Kaputkina L.M., Prokoshkin S.D. Transformation of retained austenite during tempering of high carbon steel. *Journal de Physique IV*. 2003, vol. 112, pp. 275–278. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.426-432.1119>
10. Kazyaev M.D., Samoilovich Yu.A., Paleev V.S. Mathematical modeling of stress in cold rolling working rolls with accelerated heating in a chamber furnace. *Izvestiya. Ferrous Metallurgy*. 2015, vol. 58, no. 9, pp. 696–702. (In Russ.). <https://doi.org/10.17073/0368-0797-2015-9-696-702>
11. Yang J.-A., Shen H.-F. Internal shrinkage crack in a 10 T water-cooled steel ingot with a large height-to-diameter ratio. *China Foundry*. 2021, vol. 18, no. 2, pp. 110–117. <https://doi.org/10.1007/s41230-021-0141-8>
12. Liu F., Deng L., Zhou H. Residual Stress and Warpage Simulation. In: *Computer Modeling for Injection Molding*. 2013, pp. 157–193. <https://doi.org/10.1002/9781118444887.ch6>
13. Chang R.Y., Tsaur B.D. Experimental and theoretical studies of shrinkage, warpage, and sink marks of crystalline polymer injection molded parts. *Polymer Engineering and Science*. 1995, vol. 35, no. 15, pp. 1222–1230. <https://doi.org/10.1002/pen.760351505>
14. Borzdyka A.M., Getsov L.B. *Stress relaxation in metals and alloys*. Moscow: Metallurgiya, 1972. 304 p. (In Russ.).
15. Mirković N., Brajović L., Popović Z., Todorović G., Lazarević L., Petrović M. Determination of the temperature stresses in CWR based on measured rail surface temperatures. *Construction and Building Materials*. 2021, vol. 284, pp. 122713. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2021.122713-122727>
16. Gaikwad K.R., Khavale S.G. Fractional order transient thermoelastic stress analysis of a thin circular sector disc. *International Journal of Applied Thermodynamics*. 2022, vol. 25, no. 1, pp. 1–8. <https://doi.org/10.5541/ijot.820828>
17. Kim Chai Hwan. Determination of Calibration Constants on Measurement of the Residual Stress for Polymeric Molded Parts. *Fibers and Polymers*. 2022, vol. 23, no. 4, pp. 878–881. <https://doi.org/10.1007/s12221-022-4571-8>
18. Mungle N. Thermal modelling of thin triangular plate. *JP Journal of Heat and Mass Transfer*. 2021, vol. 23, no. 1, pp. 113–125. <https://doi.org/10.17654/HM023010113>
19. Lakhtin Yu.M., Leontyeva V.P. *Materials science*. Moscow: Mashinostroyeniye. 1990. 528 p. (In Russ.).
20. Bitkina O.V. Experimental study of the influence of technological factors on the formation of multilayer panels from composite materials. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya: Tekhnicheskie nauki*. 2013, no. 1 (37), pp. 99–110. (In Russ.).
21. Li Q., Hou P., Shang S., Xu D. Three-dimensional thermal-stress analysis of transversely isotropic double-layer plate based on Green's functions. *International Journal of*

- Mechanical Sciences*. 2022, vol. 227, pp. 107431. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2022.107431>
22. Zveryaev E.M. Temperature deformation of a long elastic strip. *Vestnik Rossijskogo Universiteta Druzhby Narodov. Seriya: Inzhenernye issledovaniya*. 2021, vol. 22, no. 3, pp. 293–304. (In Russ.).
23. Cui T., Xiao G., Yan H., Zhang Y., Wang J.-Q. Numerical simulation and analysis of the thermal stresses of a planar solid oxide electrolysis cell. *International Journal of Green Energy*. 2022, pp. 1–13. <https://doi.org/10.1080/15435075.2022.2065881>
24. Bockstein B.S. *Diffusion in metals*. Moscow: Metallurgiya. 1978, 248 p. (In Russ.).
25. Bernstein M.L., Zaimovsky V.A. *Mechanical properties of metals*. Moscow: Metallurgiya, 1979. 496 p. (In Russ.).
26. Feodosiev V.I. *Resistance of materials*. Moscow: MGTU im. N.E. Bauman. 2000. 592 p. (In Russ.).

Сведения об авторах

Дмитрий Ефимович Капуткин, д.т.н., профессор кафедры физики, Московский государственный технический университет гражданской авиации
E-mail: d.kaputkin@mstuca.aero
ORCID: 0000-0002-2579-3014

Information about the authors

Dmitry E. Kaputkin, Dr. Sci. (Eng.), Prof. of Department of Physics, Moscow State Technical University of Civil Aviation
E-mail: d.kaputkin@mstuca.aero
ORCID: 0000-0002-2579-3014

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

The authors declare that there is no conflict of interest.

Поступила в редакцию 10.04.2023

После доработки 25.04.2023

Принята к публикации 28.04.2023

Received 10.04.2023

Revised 25.04.2023

Accepted 28.04.2023