

**Оригинальная статья**

УДК 536.2(075)

DOI: 10.57070/2304-4497-2024-4(50)-28-36

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЛОКАЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНОЙ СВЯЗАННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ**

© 2024 г. А. В. Пашин, И. В. Кудинов, В. А. Кудинов, Е. В. Дубас, М. В. Ненашев

Самарский государственный технический университет (Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244)

**Аннотация.** При постановке классической задачи связанной динамической термоупругости пользуются, как правило, квазистационарной или локально равновесной моделью, в которой изменения температуры по всему объему тела малы, деформация физически малого объема линейно зависит от перемещения. Связь переноса тепла с перемещением осуществляется добавлением в уравнение теплопроводности слагаемого, пропорционального скорости изменения деформации тела, а в волновое уравнение – слагаемого, пропорционального градиенту температуры. Один из основных недостатков этой модели – бесконечная скорость распространения температуры и деформации и не возможность описания быстрых процессов с большими амплитудами изменения температуры и перемещения. Используя модифицированные формулы эмпирических законов Фурье и Гука, в которых учитываются скорости изменения движущихся сил – причин (градиентов температур и перемещений) и их следствий (теплового потока и напряжения), получена математическая модель связанной динамической термоупругости в условиях теплового удара. Модель включает взаимосвязанную систему нелокальных уравнений теплопроводности и динамической термоупругости, в которой учитывается двухфазное запаздывание в тепловой и термоупругой задачах, а также сопротивление среды процессу изменения ее формы в результате температурной деформации. Анализ полученного аналитического решения модели показал, что деформация и температура распространяются в среде с близкими по величине скоростями.

**Ключевые слова:** связанная динамическая термоупругость, математическая модель, аналитическое решение, двухфазное запаздывание, модифицированные формулы Фурье и Гука, тепловой удар, волны температур и перемещений

**Для цитирования:** Пашин А.В., Кудинов И.В., Кудинов В.А., Дубас Е.В., Ненашев М.В. Математическая модель локально-неравновесной связанной динамической термоупругости. *Вестник Сибирского государственного индустриального университета*. 2024;4(50):28–36. [http://doi.org/10.57070/2304-4497-2024-4\(50\)-28-36](http://doi.org/10.57070/2304-4497-2024-4(50)-28-36)

**Original article**

**MATHEMATICAL MODEL OF LOCALLY NONEQUILIBRIUM COUPLED DYNAMIC THERMOELASTICITY**

© 2024 A. V. Pashin, I. V. Kudinov, V. A. Kudinov, E. V. Dubas, M. V. Nenashev

Samara State Technical University (244 Molodogvardeyskaya str., Samara, 443100, Russian Federation)

**Abstract.** When setting the classical problem of coupled dynamic thermoelasticity, as a rule, a quasi-stationary or locally equilibrium model is used, in which temperature changes throughout the entire volume of the body are small, the deformation of a physically small volume linearly depends on displacement. The connection of heat transfer with displacement is carried out by adding a term proportional to the rate of change of deformation of the body to the equation of thermal conductivity, and a term proportional to the temperature gradient to the wave equation. One of the main disadvantages of this model is the infinite velocity of temperature propagation and deformation and the inability to describe fast processes with large amplitudes of temperature change and displacement. Using modified formulas of empirical Fourier and Hooke laws, which take into account the rates

of change of moving forces – causes (temperature gradients and displacements) and their consequences (heat flux and stress), a mathematical model of coupled dynamic thermoelasticity under heat shock conditions is obtained. The model includes an interconnected system of nonlocal equations of thermal conductivity and dynamic thermoelasticity, which takes into account the dual-phase delay in thermal and thermoelastic problems, as well as the resistance of the medium to the process of changing its shape as a result of temperature deformation. The analysis of the obtained analytical solution of the model showed that deformation and temperature propagate in a medium with similar velocities.

**Keywords:** coupled dynamic thermoelasticity, mathematical model, analytical solution, two-phase delay, modified Fourier and Hooke formulas, heat stroke, temperature and displacement waves

**For citation:** Pashin A.V., Kudinov I.V., Kudinov V.A., Dubas E.V., Nenashev M.V. Mathematical model of locally nonequilibrium coupled dynamic thermoelasticity. *Bulletin of the Siberian State Industrial University*. 2024;4(50):28–36. (In Russ.). [http://doi.org/10.57070/2304-4497-2024-4\(50\)-28-36](http://doi.org/10.57070/2304-4497-2024-4(50)-28-36)

## Введение

Интенсивное развитие термоупругости связано с появлением в 1956 г. работы Био [1], в которой на основе законов термодинамики необратимых процессов были получены основные уравнения и сформулированы вариационные проблемы термоупругости.

В случае изменения температуры с достаточно малой скоростью задача термоупругости рассматривается как квазистатическая, то есть напряжения определяются в каждый отдельный момент времени нестационарного процесса без его связи с предшествующим изменением температуры и напряжений. Однако в работах В.И. Даниловской [2], Б. Боли и Дж. Уэйнера [3], Т. Мура [4], Е. Штернберга и И. Чакраворти [5], И. Игначака [6], В. Новацкого [7], А.Д. Коваленко [8] и др. было отмечено, что при высокоскоростных нагревах в упругих средах возникают кратковременные температурные (динамические) напряжения, зависящие от физических свойств среды и условий теплообмена. Так, в работе [2] было показано, что при тепловом ударе возникает термоупругая волна, распространяющаяся со скоростью звука в данной среде. На фронте волны имеет место скачок (разрыв) напряжений, быстро затухающий в данной точке пространства с течением времени.

В настоящее время существует много так называемых модифицированных или обобщенных моделей связанной и несвязанной задач термоупругости. В обзоре [9] перечислены наиболее часто встречающиеся в литературе модели и содержатся теории, формулировки, реальные ограничения и используемые методы решения уравнений для различных геометрий и нагрузок. В последнее время развивается теория Грина-Линдсея, в которой используются скорость распространения температуры и два времени релаксации, при этом классический закон Фурье теплопроводности принимается неизменным, а классическое уравнение энергии и связь

между напряжениями и деформациями с учетом температуры модифицируются. В рамках этой теории в работах [10; 11] представлены результаты анализа численного моделирования двух задач связанной термоупругости: сходимости, устойчивости и погрешности метода конечных элементов. В работе [12] показано, что теория Грина-Линдсея более эффективна для определения явления распространения волн, чем классическая теория. Работа [13] содержит решение уравнения, описывающего термоупругость в пластине на основе модели Грина-Линдсея. Исследована экспоненциальная устойчивость двух различных систем для задачи Коши. В рамках классической теории в работе [14] решена задача о температурном воздействии на толстостенную двухслойную цилиндрическую оболочку с шарнирно закрепленным и свободным торцами. Приведен сравнительный анализ расчетов с учетом и без учета неоднородности и нелинейного характера деформации бетона. Подобная задача решена численно в работе [15], где в качестве граничных условий были выбраны условия Дирихле и Коши. Задача решена численно. В работе [16] построено замкнутое решение связанной нестационарной задачи термоэлектроупругости для длинного пьезокерамического цилиндра с радиальной поляризацией, когда на его торцевых поверхностях выполняются граничные условия теплопроводности 1-го рода. В работе [17] учитывается связь более высокого порядка между градиентами температурных полей и градиентами полей деформации. В ряде работ [18 – 20] отмечается существенное отличие решений динамических задач термоупругости с учетом связанности полей деформации и температуры и без ее учета. Необходимо отметить, что в несвязанных задачах скачок напряжений остается неизменным, тогда как в связанных – быстро уменьшается во времени. Вопрос влияния времени установления граничных условий на величину динамических температурных напряжений

исследован в работе Э.М. Карташова и В.А. Кудинова [18].

В настоящей работе найдено аналитическое решение связанной задачи динамической термоупругости с использованием уравнений, полученных с учетом двухфазной релаксации в формулах законов Фурье и Гука. Цель работы состояла в получении аналитических соотношений, позволяющих выполнять оценку взаимного влияния, а также в определении скоростей движения тепловой и звуковой волн в условиях их связанности.

### Математическая постановка задачи

Рассмотрим вывод основных уравнений связанной динамической термоупругости с учетом релаксационных явлений в тепловой и упругой задачах. Уравнение теплового баланса в данном случае будет иметь вид [19]:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} - A \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \quad (1)$$

где  $T$  – температура, К;  $x$  – координата, м;  $t$  – время, с;  $q$  – внутренний источник теплоты, Вт/м<sup>3</sup>;  $u$  – перемещение, м;  $c$  – теплоемкость, кДж/(кг·К);  $\rho$  – плотность, кг/м<sup>3</sup>;  $A = (3\lambda_n + 2\mu_n)\alpha T_0$ ;  $\alpha$  – коэффициент линейного расширения, 1/К;  $T_0$  – начальная температура, К;

$\lambda_n = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  и  $\mu_n = G = \frac{E}{2\nu+1}$  – постоянные Ламе, Н/м<sup>2</sup>;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $E$  – модуль нормальной упругости, Н/м<sup>2</sup>;  $G$  – модуль сдвига, Н/м<sup>2</sup>.

Второе слагаемое правой части уравнения (1) характеризует внутренний источник теплоты, возникающий в результате деформации тела  $\varepsilon = \partial u / \partial x$  вследствие изменения его температуры. По сути, это слагаемое характеризует скорость изменения деформации тела, так как  $A \partial^2 u / (\partial x \partial t) = A \partial \varepsilon / \partial t$ .

Уравнение равновесия (движения) с учетом силы сопротивления среды имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho \gamma \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (2)$$

где  $\gamma$  – коэффициент сопротивления, 1/с.

Последнее слагаемое уравнения (2) характеризует сопротивление среды процессу изменения ее формы.

Уравнения эмпирических законов Фурье и Гука с учетом двухфазной релаксации будут иметь вид:

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \tau_1 \frac{\partial q}{\partial t}; \quad (3)$$

$$\sigma = B \frac{\partial u}{\partial x} + Br_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \tau_2 \frac{\partial \sigma}{\partial t} - D \alpha T, \quad (4)$$

где  $B = \lambda_n + 2\mu_n$ ;  $D = 3\lambda_n + 2\mu_n$ ;  $\tau_1, \tau_2, r_1$  – времена релаксации, с.

Подставляя выражения (3) и (4) в зависимости (1), (2), находим:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \tau_1 \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial t} - A \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}; \quad (5)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = B \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Br_1 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - \tau_2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial t} - D \alpha \frac{\partial T}{\partial x} - \rho \gamma \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (6)$$

Выразим  $\partial q / \partial x$  и  $\partial \sigma / \partial x$  из уравнений (1) и (2) и подставим в зависимости (5), (6):

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \tau_1 c\rho \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - A \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \tau_1 A \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2}; \quad (7)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho \tau_2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = B \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Br_1 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - \rho \gamma \tau_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - D \alpha \frac{\partial T}{\partial x} - \rho \gamma \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (8)$$

Краевые условия к уравнениям (7), (8) имеют вид

$$T(x, 0) = T_0; \quad (9)$$

$$\frac{\partial T(x, 0)}{\partial t} = 0; \quad (10)$$

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0; \quad (11)$$

$$T(\delta, t) = T_{ct}; \quad (12)$$

$$u(x, 0) = 0; \quad (13)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0; \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial t^2} = 0; \quad (15)$$

$$u(0, t) = 0; \quad (16)$$

$$\frac{\partial u(\delta, t)}{\partial x} = 0, \quad (17)$$

где  $\delta$  – толщина пластины;  $T_{ct}$  – температура пластины при  $x = \delta$ .

Соотношения (7) – (17) представляют математическую постановку задачи связанной динамической термоупругости для бесконечной пластины с симметричными граничными условиями первого рода (тепловой удар).

Обозначим:

$$\Theta = \frac{T - T_0}{T_{cr} - T_0}; \quad Fo = \frac{at}{\delta^2}; \quad \xi = \frac{x}{\delta}; \quad H = \frac{u}{\delta}, \quad (18)$$

где  $a$  – коэффициент температуропроводности.

Задача (7) – (17) с учетом принятых обозначений будет иметь вид:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Fo} + F_1 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Fo^2} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} - A_1 \frac{\partial^2 H}{\partial \xi \partial Fo} - F_1 A_1 \frac{\partial^3 H}{\partial \xi \partial Fo^2}; \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial Fo^2} + F_2 \frac{\partial^3 H}{\partial Fo^3} = B_1 \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} - B_1 F_3 \frac{\partial^3 H}{\partial \xi^2 \partial Fo} - \\ - F_2 F_4 \frac{\partial^2 H}{\partial Fo^2} - F_4 \frac{\partial H}{\partial Fo} - D_1 \frac{\partial \Theta}{\partial \xi}; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0; \quad (21)$$

$$\frac{\partial \Theta(\xi, 0)}{\partial Fo} = 0; \quad (22)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} = 0; \quad (23)$$

$$\Theta(1, Fo) = 1; \quad (24)$$

$$H(\xi, 0) = 0; \quad (25)$$

$$\frac{\partial H(\xi, 0)}{\partial Fo} = 0; \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 H(\xi, 0)}{\partial Fo^2} = 0; \quad (27)$$

$$H(0, Fo) = 0; \quad (28)$$

$$\frac{\partial H(1, Fo)}{\partial \xi} = 0; \quad (29)$$

где

$$F_1 = \frac{a\tau_1}{\delta^2}; \quad F_2 = \frac{a\tau_2}{\delta^2}; \quad F_3 = \frac{ar_1}{\delta^2}; \quad F_4 = \frac{\gamma\delta^2}{a}; \quad (30)$$

$$B_1 = \frac{B\delta^2}{a^2\rho}; \quad D_1 = \frac{Da\Delta T\delta^2}{a^2\rho}; \quad A_1 = \frac{A}{c\rho\Delta T};$$

$$\Delta T = T_{cr} - T_0.$$

### Точное аналитическое решение

Решение задачи (19) – (29) имеет вид

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^5 G_n^i \exp(\omega_n^i Fo) \cos(\lambda_n \xi); \quad (31)$$

$$H(\xi, Fo) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^5 C_n^i \exp(\omega_n^i Fo) \sin(\lambda_n \xi), \quad (32)$$

где  $\lambda_n = \frac{2n+1}{2}\pi$  – собственные числа краевой задачи Штурма-Лиувилля;

$\omega_n^i$  – корни характеристического уравнения

$$b_1 \omega_n^5 + b_2 \omega_n^4 + b_3 \omega_n^3 + b_4 \omega_n^2 + b_5 \omega_n + b_6 = 0,$$

где  $b_1 = F_1 F_2$ ;  $b_2 = F_1 + F_2 + F_1 F_2 F_4$ ;

$$b_3 = 1 + (F_1 + F_2)F_4 + \lambda_n^2(F_1 F_3 B_1 + F_2);$$

$$b_4 = \lambda_n^2(1 + B_1 F_3 + B_1 F_1 + F_2 F_4 + D_1 A_1 F_1) + F_4;$$

$$b_5 = \lambda_n^2 B_1 + \lambda_n^4 B_1 F_3 + \lambda_n^2 F_4 + \lambda_n^2 D_1 A_1; \quad b_6 = \lambda_n^4 B_1;$$

$C_n^i$  и  $G_n^i$  – постоянные интегрирования, которые находятся из решения системы линейных уравнений:

$$\sum_{i=1}^5 C_n^i = 0; \quad (33)$$

$$\sum_{i=1}^5 C_n^i \omega_n^i = 0; \quad (34)$$

$$\sum_{i=1}^5 C_n^i \omega_n^{i^2} = 0; \quad (35)$$

$$\sum_{i=1}^5 G_n^i = (-1)^n \frac{2}{\lambda_n}; \quad (36)$$

$$\sum_{i=1}^5 G_n^i \omega_n^i = 0; \quad (37)$$

$$G_n^i = - \frac{F_2 \omega_n^{i^3} + (1 + F_2 F_4) \omega_n^{i^2} + (F_3 B_1 \lambda_n^2 + F_5) \omega_n^i + B_1 \lambda_n^2}{D_1 \lambda_n} C_n^i. \quad (38)$$

При решении системы уравнений (7) – (17) принимались следующие исходные данные:

$$\begin{aligned} T_{cr} = 600 \text{ К}; \quad c = 500 \text{ Дж/(кг·К)}; \quad \nu = 0,25; \\ E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}; \quad \rho = 7800 \text{ кг/м}^3; \quad \alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}; \\ \delta = 10^{-6} \text{ м}; \quad \gamma = 10^3 \text{ с}^{-1}; \quad a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}; \quad \tau_1 = 3,33 \cdot 10^{-14} \text{ с}; \\ \tau_2 = 2,00 \cdot 10^{-14} \text{ с}; \quad r_1 = 2,05 \cdot 10^{-14} \text{ с}. \end{aligned} \quad (39)$$

### Обсуждение результатов

Результаты расчетов перемещений и температур по формулам (31), (32) приведены на рис. 1 – 3. За характерный масштаб времени возьмем безразмерное время прохождения волны от точки с координатой  $\xi = 0$  до точки с координатой  $\xi = 1$ , определяемое графическим способом (рис. 1):  $t_u = 1,494 \cdot 10^{-4}$ .

Динамика изменения температуры и перемещения рассматривалась на двух временных масштабах: наносекундном  $Fo = 0 \div 4 \cdot t_u$  (от 0 до 0,60 нс); микросекундном  $Fo = 4900 \cdot t_u \div 5000 \cdot t_u$  (от 0,73 мкс до 0,75 мкс). На наносекундном временном отрезке анализ рис. 1 – 3 позволяет заключить, что после температурного удара (граничные условия первого рода (24)) между точками с координатами  $\xi = 1$  и  $\xi = 0$  движется скачок температуры с безразмерной скоростью  $v_\phi = \frac{1}{t_u} = 6993$ , а также с этой же скоростью движется скачок градиента переме-

щения  $\frac{\partial H}{\partial \xi}$  (рис. 3). Время прохождения скачков температуры через любую точку тела с координатой  $\xi$  (рис. 1) можно вычислить по следующим формулам:

$$Fo_1 = (4n+1-\xi)t_u; \quad Fo_2 = (4n+1+\xi)t_u;$$

$$Fo_3 = (4n+3-\xi)t_u; \quad Fo_4 = (4n+3+\xi)t_u, \quad (40)$$

где  $n = 0, 1, 2, 3 \dots$  номер периода колебания.

При временах  $Fo \gg t_u$  решение (31) в среднем совпадает с классическим решением уравнения теплопроводности (рис. 4). При этом температура колеблется относительно решения классического параболического уравнения теплопроводности.

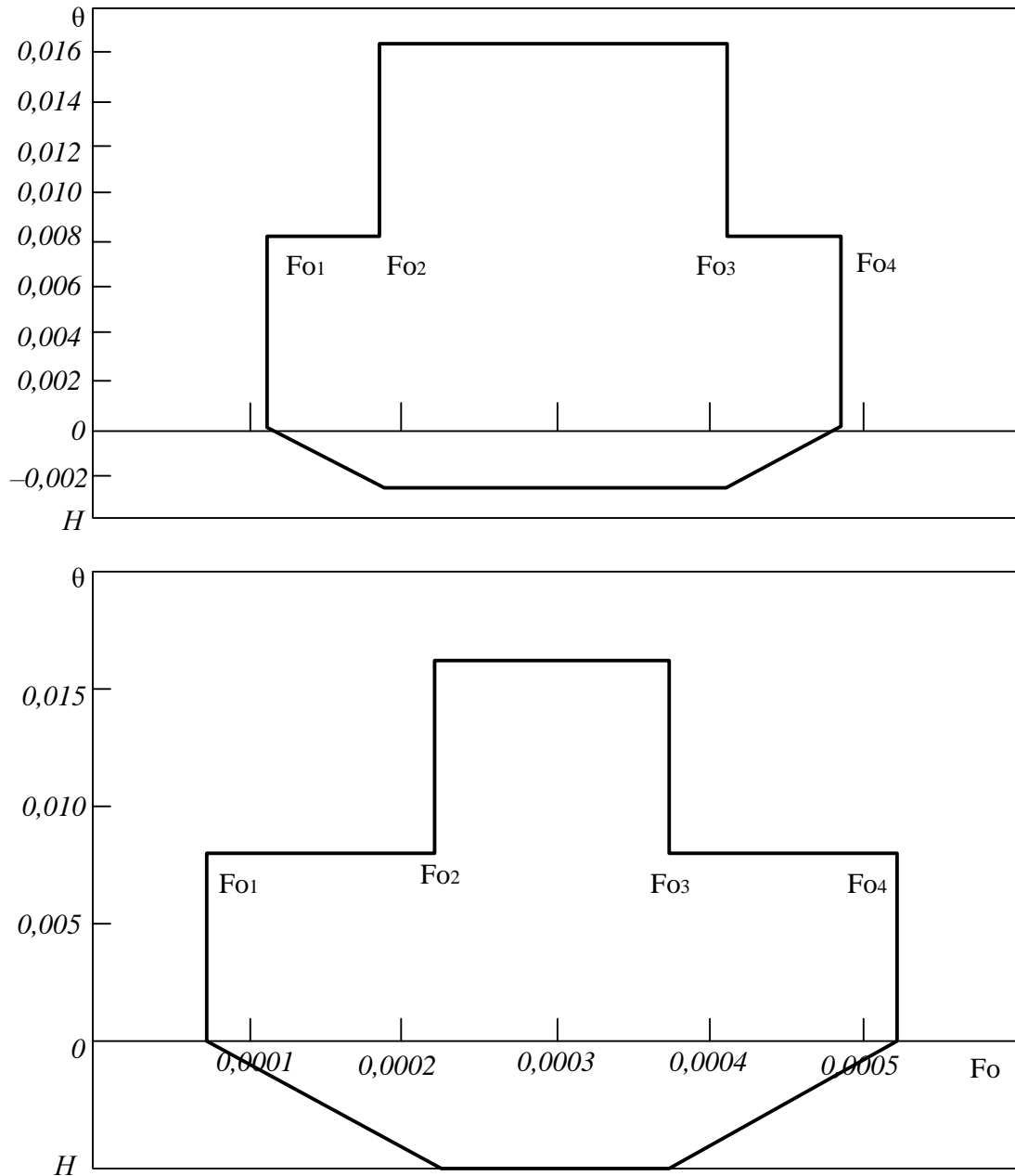


Рис. 1 Зависимость температуры (1) и перемещения (2) от времени в точках  $\xi = 0,25$  (а) и  $\xi = 0,5$  (б)  
 Fig. 1. Dependence of temperature (1) and displacement (2) from time to time at various points:  $\xi = 0,25$  (a) и  $\xi = 0,5$  (b)

**Выводы**

Предложена математическая модель связанной динамической термоупругости в условиях теплового удара с учетом пространственно-временной нелокальности в законах Фурье и Гука, а также сопротивления среды деформациям. Модель описывает физические процессы переноса тепла и распространения перемещений в пластине на нановременных масштабах с учетом их скачкообразного изменения. Для больших временных диапазонов полученное решение тепловой задачи в среднем

совпадает с решением классического параболического уравнения теплопроводности.

Анализ полученных решений показал, что скорости распространения перемещений и температурного фронта равны между собой и практически совпадают со скоростью распространения классической звуковой волны. Действительно, скорость звука равна  $v_{зв} = \sqrt{B_1} = 6667$ , а скорость, найденная из решения задачи связанной термоупругости, составляет  $v_{\phi} = 6693$ .

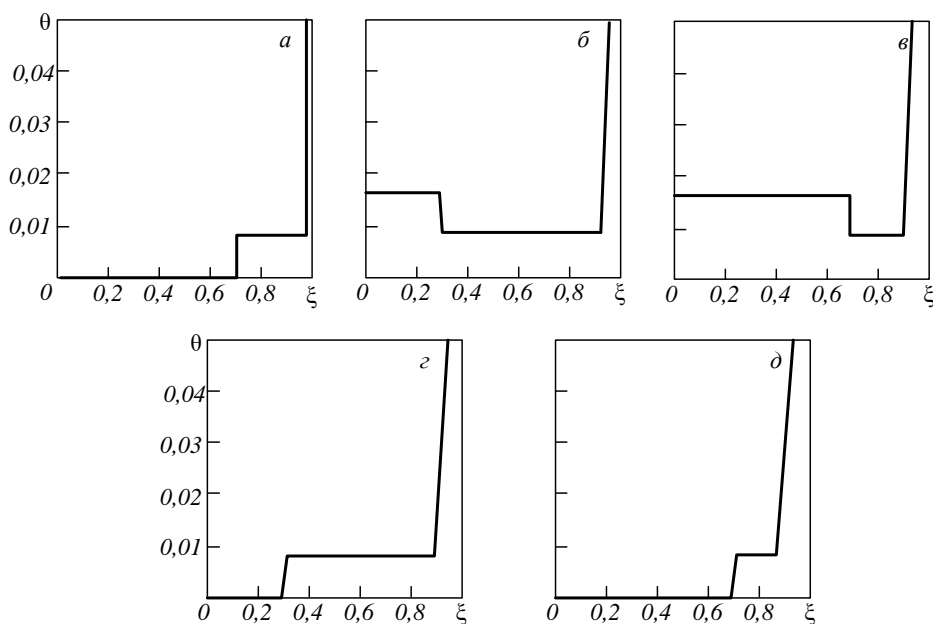


Рис. 2. Зависимость температуры от координаты в различные моменты времени:

$a - Fo = 0,3tu; \bar{b} - Fo = 1,3tu; \bar{b} - Fo = 2,3tu; z - Fo = 3,3tu; \bar{d} - Fo = 4,3tu$

Fig. 2. Temperature dependence on the coordinate at different points in time:

$a - Fo = 0,3tu; \bar{b} - Fo = 1,3tu; \bar{b} - Fo = 2,3tu; z - Fo = 3,3tu; \bar{d} - Fo = 4,3tu$

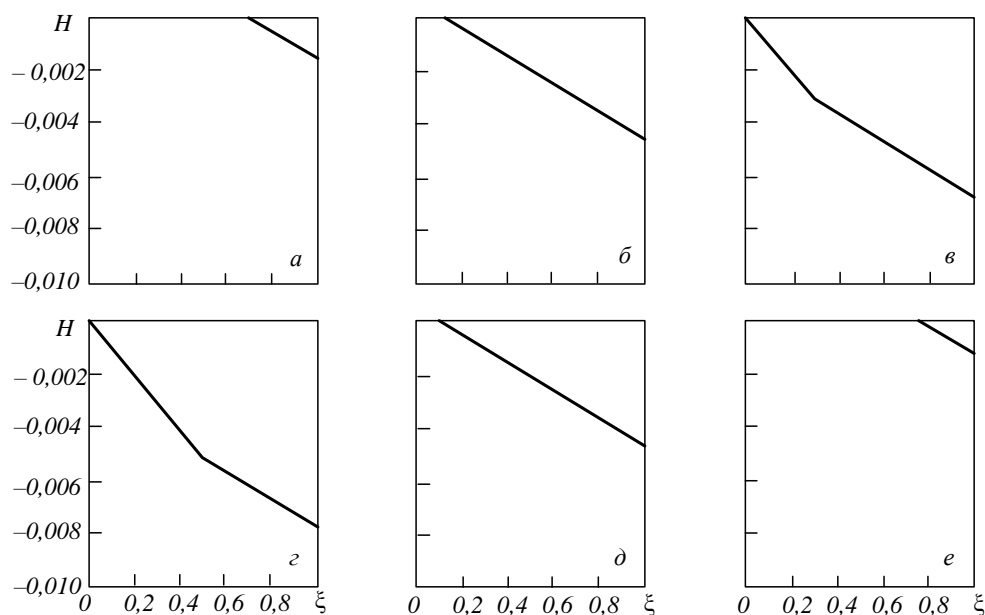


Рис. 3. Зависимость перемещения от координаты в различные моменты времени:

$a - Fo = 0,3tu; \bar{b} - Fo = 0,9tu; \bar{b} - Fo = 1,3tu; z - Fo = 2,5tu; \bar{d} - Fo = 3,1tu; e - Fo = 3,75tu$

Рис. 3. The dependence of the movement on the coordinate at different points in time:

$a - Fo = 0,3tu; \bar{b} - Fo = 0,9tu; \bar{b} - Fo = 1,3tu; z - Fo = 2,5tu; \bar{d} - Fo = 3,1tu; e - Fo = 3,75tu$

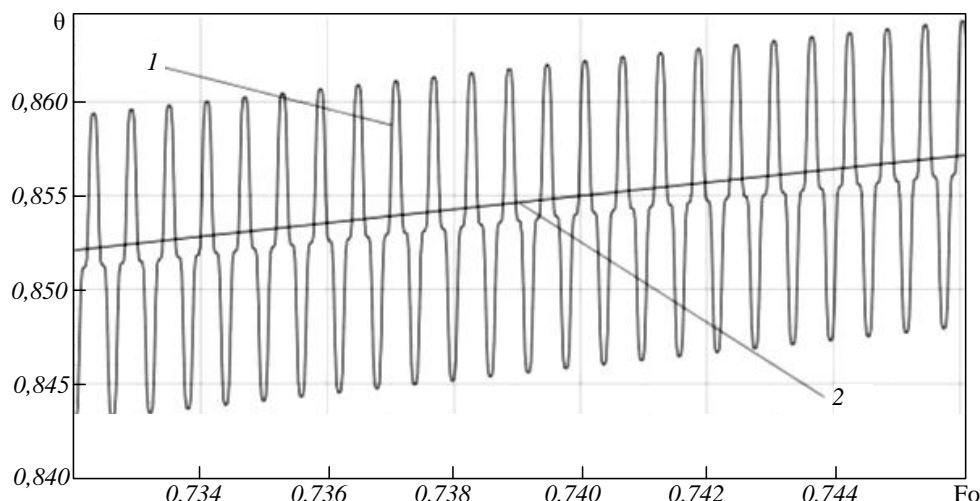


Рис. 4. Зависимость температуры от времени в точке  $\xi = 0,5$  в интервале  $Fo = 4900 \cdot t_u - 5000 \cdot t_u$   
 1 – решение задачи (19) – (29); 2 – решение классической задачи теплопроводности

Fig. 4. Temperature dependence on time at a point  $\xi = 0,5$  in the interval  $Fo = 4900 \cdot t_u - 5000 \cdot t_u$ . In the figure: graph 1 corresponds to the solution of the problem (19) – (29); graph 2 corresponds to the solution of the classical problem of thermal conductivity

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Biot M.A. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics. *Journ. Appl. Phys.* 1956; 27(3):240–254.
2. Даниловская В.И. Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы. *Прикладная математика и механика.* 1950;14(3):317–318.
3. Боли Б., Уэйнер Дж. *Теория температурных напряжений.* Москва: Мир. 1964:517.
4. Mura T. Dynamical thermal stresses due to thermal shocks. *Res. Rept Meiji Univ. Fac. Eng.* 1956;(8):64–73.
5. Sternberg E., Chakravorti J.G. Thermal shock in an elastic body with a spherical cavity. *Quart. Appl. Math.* 1959;17(2):205–218.
6. Jgnaczak J. Thermal stresses in a long cylinder heated in a discontinuous manner over the lateral surface. *Arch. mech. stosow.* 1958;(10):25–32.
7. Новацкий В. *Динамические задачи термоупругости.* Москва: Мир, 1970:256.
8. Коваленко А.Д. *Введение в термоупругость.* Киев: Наукова Думка. 1965:202.
9. Shakeriaski F., Ghodrati M., Escobedo-Diaz J., Behnia M. Recent advances in generalized thermoelasticity theory and the modified models: a review. *Journal of Computational Design and Engineering.* 2021;8(1):15–35. <https://doi.org/10.1093/jcde/qwaa082>
10. Bazarra N., Fernández J.R., Quintanilla R. Analysis of a strain-gradient problem arising in MGT thermoelasticity. *Journal of Thermal Stresses.* 2023;46(8):706–727. <https://doi.org/10.1080/01495739.2023.2211632>
11. Bazarra N., Fernández J.R., Quintanilla R. Analysis of two thermoelastic problems with the Green–Lindsay model. *Comp. Appl. Math.* 2023;42:196. <https://doi.org/10.1007/s40314-023-02335-5>
12. Shakeriaski F., Ghodrati M., Escobedo-Diaz J., Behnia M. Modified Green–Lindsay thermoelasticity wave propagation in elastic materials under thermal shocks. *Journal of Computational Design and Engineering.* 2021;8(1):36–54. <https://doi.org/10.1093/jcde/qwaa061>
13. Ramón Quintanilla, Reinhard Racke, Yoshihiro Ueda. Decay for thermoelastic Green-Lindsay plates in bounded and unbounded domains. *Communications on Pure and Applied Analysis.* 2023;22(1):167–191. <https://doi.org/10.3934/cpaa.2022149>
14. Polyakova L., Andreev V. Solution of the problem of thermoelasticity for nonlinear elastic inhomogeneous thick-wall cylindrical shell. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering.* 2019;15(4):133–142. <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2019-15-4-133-142>
15. Sharifi Torki H., Shahani A.R. Analytical Solution of the Coupled Dynamic Thermoelasticity Problem in a Hollow Cylinder. *Journal of Stress Analysis.* 2020; 5(1):121–134. <https://doi.org/10.22084/jrstan.2020.22464.1155>
16. Shlyakhin D.A., Kalmova M.A. Related thermoelastic elastomeric task for long cylinder. *AIP Conference Proceedings.* 2023; 2497:030009 <https://doi.org/10.1063/5.0103490>

17. Lurie S.A., Volkov-Bogorodskii D.B., Belov P.A. Analytical solution of stationary coupled thermoelasticity. *Problem for Inhomogeneous Structures. Mathematics.* 2022;10(1):90. <https://doi.org/10.3390/math10010090>
18. Карташов Э.М., Кудинов В.А. *Аналитические методы теории теплопроводности и ее приложений.* Москва: ЛЕНАНД, 2018:1072.
19. Kudinov I.V., Kudinov V.A., Gavrilova T.E. Mathematical modelling of thermal dynamic stresses on the basis of a dual-phase lag model. *International Journal of Heat and Mass Transfer.* 2019;138:326–334. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.04.011>
20. Кудинов И.В., Кудинов В.А. Задачи динамической термоупругости на основе аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности. *Теплофизика высоких температур.* 2015;53(4):551–555. <https://doi.org/10.7868/S0040364415030102>. EDN: UDEVNN

#### REFERENCES

1. Biot M.A. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics. *Journ. Appl. Phys.* 1956;27(3):240–254.
2. Danilovskaya V.I. Temperature stresses in an elastic half-space arising from sudden heating of its boundary. *Applied mathematics and mechanics.* 1950;14(3):317–318. (In Russ.).
3. Boli B., Weiner J. *Theory of temperature stresses.* Moscow: Mir, 1964;517. (In Russ.).
4. Mura T. Dynamical thermal stresses due to thermal shocks. *Res. Rept Meiji Univ. Fac. Eng.* 1956;(8):64–73.
5. Sternberg E., Chakravorti J.G. Thermal shock in an elastic body with a spherical cavity. *Quart. Appl. Math.* 1959;17(2):205–218.
6. Jgnaczak J. Thermal stresses in a long cylinder heated in a discontinuous manner over the lateral surface. *Arch. mech. stosow.* 1958;(10):25–32.
7. Novatsky V. *Dynamic problems of thermoelasticity.* Moscow: Mir, 1970;256. (In Russ.).
8. Kovalenko A.D. *Introduction to thermoelasticity.* Kiev: Naukova Dumka. 1965:202. (In Russ.).
9. Shakeriaski F., Ghodrati M., Escobedo-Diaz J., Behnia M. Recent advances in generalized thermoelasticity theory and the modified models: a review. *Journal of Computational Design and Engineering.* 2021;8(1):15–35. <https://doi.org/10.1093/jcde/qwaa082>
10. Bazarra N., Fernández J.R., Quintanilla R. Analysis of a strain-gradient problem arising in MGT thermoelasticity. *Journal of Thermal Stresses.* 2023;46(8):706–727. <https://doi.org/10.1080/01495739.2023.2211632>
11. Bazarra N., Fernández J.R., Quintanilla R. Analysis of two thermoelastic problems with the Green–Lindsay model. *Comp. Appl. Math.* 2023;42:196. <https://doi.org/10.1007/s40314-023-02335-5>
12. Shakeriaski F., Ghodrati M., Escobedo-Diaz J., Behnia M. Modified Green–Lindsay thermoelasticity wave propagation in elastic materials under thermal shocks. *Journal of Computational Design and Engineering.* 2021;8(1):36–54. <https://doi.org/10.1093/jcde/qwaa061>
13. Ramón Quintanilla, Reinhard Racke, Yoshihiro Ueda. Decay for thermoelastic Green–Lindsay plates in bounded and unbounded domains. *Communications on Pure and Applied Analysis.* 2023;22(1):167–191. <https://doi.org/10.3934/cpaa.2022149>
14. Polyakova L., Andreev V. Solution of the problem of thermoelasticity for nonlinear elastic inhomogeneous thick-wall cylindrical shell. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering.* 2019;15(4):133–142. <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2019-15-4-133-142>
15. Sharifi Torki H., Shahani A.R. Analytical Solution of the Coupled Dynamic Thermoelasticity Problem in a Hollow Cylinder. *Journal of Stress Analysis.* 2020; 5(1):121–134. <https://doi.org/10.22084/jrstan.2020.22464.1155>
16. Shlyakhin D.A., Kalmova M.A. Related thermoelastic elastomeric task for long cylinder. *AIP Conference Proceedings.* 2023; 2497:030009 <https://doi.org/10.1063/5.0103490>
17. Lurie S.A., Volkov-Bogorodskii D.B., Belov P.A. Analytical solution of stationary coupled thermoelasticity. *Problem for Inhomogeneous Structures. Mathematics.* 2022;10(1):90. <https://doi.org/10.3390/math10010090>
18. Kartashov E.M., Kudinov V.A. Analytical methods of the theory of thermal conductivity and its applications. Moscow: LENAND, 2018:1072. (In Russ.).
19. Kudinov I.V., Kudinov V.A., Gavrilova T.E. Mathematical modelling of thermal dynamic stresses on the basis of a dual-phase lag model. *International Journal of Heat and Mass Transfer.* 2019;138:326–334. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.04.011>
20. Kudinov I.V., Kudinov V.A. Problems of dynamic thermoelasticity based on the analytical solution of the hyperbolic thermal conductivity



equation. *Thermophysics of high temperatures*. 2015;53(4):551–555.  
<https://doi.org/10.7868/S0040364415030102>.

**Сведения об авторах**

**Алексей Владимирович Пашин**, старший преподаватель кафедры «Физика», Самарский государственный технический университет  
*E-mail*: pashinalexey@yandex.ru  
*ORCID*: 0000-0001-5084-0241  
*SPIN-код*: 3066-7711

**Игорь Васильевич Кудинов**, д.т.н., профессор, заведующий кафедрой «Физика», Самарский государственный технический университет  
*E-mail*: igor-kudinov@bk.ru  
*ORCID*: 0000-0002-9422-0367  
*SPIN-код*: 4122-0072

**Василий Александрович Кудинов**, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой "Теоретические основы теплотехники и гидромеханика", Самарский государственный технический университет  
*E-mail*: totig@samgtu.ru  
*ORCID*: 0000-0002-3071-5168  
*SPIN-код*: 1534-6882

**Елена Владимировна Дубас**, старший преподаватель кафедры «Физика», Самарский государственный технический университет  
*E-mail*: dev575@mail.ru  
*SPIN-код*: 4784-2119

**Максим Владимирович Ненасhev**, д.т.н., первый проректор – проректор по научной работе, Самарский государственный технический университет  
*E-mail*: nenashev.mv@samgtu.ru  
*ORCID*: 0000-0003-3918-5340

**Information about the authors**

**Alexey V. Pashin**, Senior lecturer at the Department of Physics, Samara State Technical University

*E-mail*: pashinalexey@yandex.ru  
*ORCID*: 0000-0001-5084-0241  
*SPIN-код*: 3066-7711

**Igor V. Kudinov**, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Head of the Department of Physics, Samara State Technical University  
*E-mail*: igor-kudinov@bk.ru  
*ORCID*: 0000-0002-9422-0367  
*SPIN-код*: 4122-0072

**Vasily A. Kudinov**, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Head of the Department "Theoretical Foundations of Thermal Engineering and Hydromechanics", Samara State Technical University  
*E-mail*: totig@samgtu.ru  
*ORCID*: 0000-0002-3071-5168  
*SPIN-код*: 1534-6882

**Elena V. Dubas**, Senior lecturer at the Department of Physics, Samara State Technical University  
*E-mail*: dev575@mail.ru  
*SPIN-код*: 4784-2119

**Maxim V. Nenashev**, Dr. Sci. (Eng.), First Vice-Rector-Vice-Rector for Scientific Work, Samara State Technical University  
*E-mail*: nenashev.mv@samgtu.ru  
*ORCID*: 0000-0003-3918-5340

*Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*

*The authors declare that there is no conflict of interest.*

Поступила в редакцию 04.06.2024  
После доработки 08.07.2024  
Принята к публикации 11.07.2024

Received 04.06.2024  
Revised 08.07.2024  
Accepted 11.07.2024